<u>Vorbereitungsaufgaben:</u>
<u>komplexe Rechnung</u>

<u>1.Aufgabe:</u>

1. - Nennen Sie die Möglichkeiten zu Darstellung komplexer Größen!
2. - Wie werden komplexe Zahlen am besten addiert ?
3. - Wie werden komplexe Zahlen am besten subtrahiert ?
4. - Wie werden komplexe Zahlen am besten multipliziert ?
5. - Wie werden komplexe Zahlen am besten dividiert ?
6. - Wie kann man komplexe Zahlen in kartesischer Form in die Exponentialform umrechnen ?
7. - Was versteht man unter Wirkleistung, Blindleistung und Scheinleistung ?

Zu 1.: Komponenten- oder auch Kartesische Form

$$z = a + b\,j \qquad a: \Re ealteil, b: \Im maginärteil$$

Exponential- oder Polarform:

$$z = \mathrm{e}^{j\varphi} = \cos\varphi + j\sin\varphi$$

Zu 2.: Man addiert komplexe Zahlen, indem man die reellen und imaginären Komponenten getrennt addiert. Dazu eignet sich die Komponentendarstellung am Besten.

Zu 3.: Man subtrahiert komplexe Zahlen, indem man die rellen und komplexen Komponenten getrennt subtrahiert. Hierzu eignet sich die Komponentendarstellung am Besten.

Zu 4.: Man multipliziert komplexe Zahlen, indem man ihre Beträge multipliziert und ihre Richtungswinkel addiert. Dazu eignet sich die Polarform am Besten.

Zu 5.: Man dividiert komplexe Zahlen, indem man ihre Beträge dividiert und ihre Richtungswinkel subtrahiert. Dazu eignet sich die Polarform am Besten.

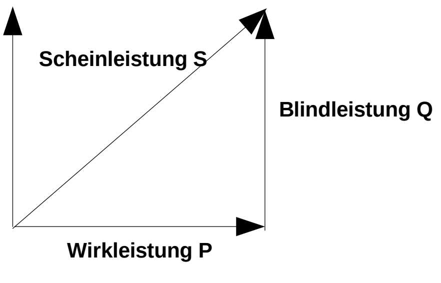
Zu 6.: Umwandlung von kartesischer in Polarform:

$$z = a + b\,j \qquad |z| = \sqrt{a^2 + b^2} \quad \Rightarrow \quad z = |z|\,\mathrm{e}^{j\varphi}$$
$$\varphi = \arctan\frac{b}{a}$$

Umwandlung von Polar- in kartesische Form:

$$z = r \cdot \mathrm{e}^{j\varphi} \qquad a = r \cdot \cos\varphi \quad \Rightarrow \quad z = a + b \cdot j$$
$$b = r \cdot \sin\varphi$$

Zu 7.:



Wirkleistung: Die Wirkleistung ist der zeitliche Mittelwert der Leistung in einem System zeitlich veränderlicher Ströme

$P = U \cdot I \cdot \cos\varphi$ Einheit: [Watt]

Blindleistung: Die Blindleistung ist die Leistung die von Blindelementen (z.B. Kondensator und Spule) aufgenommen bzw. abgegeben wird. Daher kann die Blindleistung durch mit dem Bezeichnungen kapazitive und induktive Blindleistung genauer spezifiziert werden.

$Q = U \cdot I \cdot \sin\varphi$ Einheit: [var] (volt-ampere-reactive)

Scheinleistung: Die Scheinleistung bezeichnet die anscheinend vorhandene Leistung. Sie setzt sich aus dem Wirk und dem Blindanteil zusammen.

$$\underline{S} = \underline{U} \cdot \underline{I}^*$$
$$= U \cdot I \cdot e^{j(\varphi u - \varphi i)}$$
$$= P - j \cdot Q$$

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2}$$

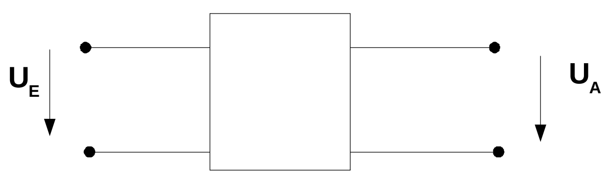
<u>2.Aufgabe:</u>

1. - Wie ist die Übertragungsfunktion eines Vierpols definiert?
2. - Was versteht man unter einem Hochpass?
- Zeichnen sie die Schaltung des Hochpasses!
- Berechnen Sie Übertragungsfunktion des Hochpasses und den Phasenwinkel!
- Zeichnen sie das Bode-Diagramm des Amplitudenfrequenzganges des Hochpasses!
3. - Was versteht man unter Tiefpass?
- Zeichnen sie die Schaltung des Tiefpasses!
- Berechnen Sie Übertragungsfunktion des Tiefpasses und den Phasenwinkel!
- Zeichnen sie das Bode-Diagramm des Amplitudenfrequenzganges des Tiefpasses!
4. - Was versteht man unter Grenzfrequenz ?

Zu 1.: Die Übertragungsfunktion ist das Verhältnis von Eingangs- zu Ausgangsspannung abhängig von der Frequenz.

$$H(f) = \frac{U_A(f)}{U_E(f)} = A(f) e^{j\varphi}$$

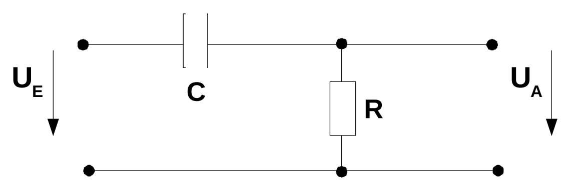
$A(f)$ = Amplitudenfrequenzgang
$\varphi(f)$ = Phasenfrequenzgang



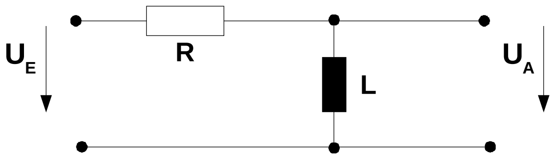
komplexe Übertragungsfunktion: $\underline{H}(f) = \frac{\underline{U}_A(f)}{\underline{U}_E(f)} = \left|\frac{\underline{U}_A}{\underline{U}_E}\right| \cdot e^{j(\varphi A - \varphi E)}$

Zu 2.: Ein Hochpass ist eine Vierpolschaltung. Ein Hochpass dient als Filterschaltung. Er dämpft tiefe Frequenzen und überträgt hohe Frequenzen unbeeinflusst.

C-R-Hochpass:



R-L-Hochpass:



Für den R-C-Hochpass ergibt sich nach der Spannungsteilerregel die Übertragungsfunktion:

$$\underline{H}(\omega)=\frac{\underline{U}_A(\omega)}{\underline{U}_E(\omega)}=\frac{R}{R+\frac{1}{j\omega C}}=\frac{1}{1+\frac{1}{j\omega RC}}=\frac{j\omega RC}{1+j\omega RC}$$

Zu sehen ist hier auch, dass für $\omega\rightarrow\infty$ $U_A = U_E$ ist, also hohe Frequenzen nicht verändert werden.

Der Phasenwinkel ergibt sich mit $\varphi(\omega)=\arctan(\frac{\Im(H(\omega))}{\Re(H(\omega))})$

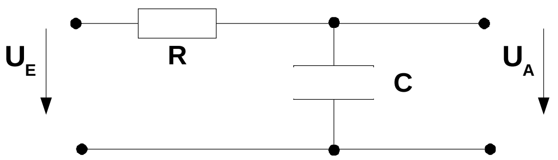
zu $\varphi_A=\arctan(\frac{1}{\omega RC})$

Analog lässt sich auch die Übertragungsfunktion der RL-Schaltung herleiten.

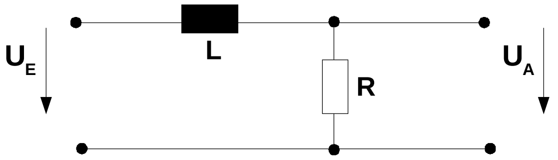
$$\underline{H}(\omega)=\frac{\underline{U}_A(\omega)}{\underline{U}_E(\omega)}=\frac{\frac{j\omega L}{R}}{1+\frac{j\omega L}{R}}$$

Zu. 3.: Ein Tiefpass ist eine Vierpolschaltung. Ein Tiefpass dient als Filterschaltung. Er dämpft hohe Frequenzen und überträgt tiefe Frequenzen unbeeinflusst.

R-C-Tiefpass:



L-R-Tiefpass:



Für den C-R-Tiefpass ergibt sich nach der Spannungsteilerregel die Übertragungsfunktion:

$$\underline{H}(\omega)=\frac{\underline{U}_A(\omega)}{\underline{U}_E(\omega)}=\frac{\frac{1}{j\omega C}}{R+\frac{1}{j\omega C}}=\frac{1}{1+j\omega RC}$$

Zu sehen ist hier auch, dass für $\omega \to 0$ $U_A = U_E$ ist, also nur tiefe Frequenzen nicht verändert werden.

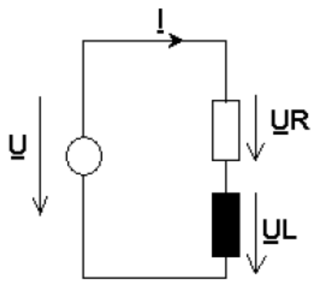
Analog ergibt sich für den L-R-Tiefpass:

$$\underline{H}(\omega) = \frac{\underline{U}_A(\omega)}{\underline{U}_E(\omega)} = \frac{R}{R + j\omega L} = \frac{1}{1 + \frac{j\omega L}{R}}$$

Zu. 4.: Die Grenzfrequenz ist definiert als $\omega = \frac{1}{\tau}$

3. Aufgabe:

Eine Spule, deren Ersatzschaltbild durch die Reihenschaltung des Wirkwiderstandes R = 150 Ω und der Induktivität L = 0,4 H gegeben ist, liegt an einer sinusförmigen Spannung der Frequenz f = 50 Hz mit dem Effektivwert U = 220 V (die Spannung U wird als Bezugsgröße gewählt).



1. *- Bestimmen Sie den Scheinwiderstand der Reinschaltung in exponentieller Form.*
2. *- Welchen Strom nimmt die Spule auf und wie groß ist er? (Die Spannung U wird als Bezugsgröße gewählt)*
3. *- Um welchen Winkel ist die Spannung U_R gegenüber dem Strom phasenverschoben ?*
4. *- Um welchen Winkel ist die Spannung U_L gegenüber dem Strom phasenverschoben ?*
5. *- Um welchen Winkel ist die Spannung U gegenüber dem Strom phasenverschoben ?*

Zu 1.: $Z = \frac{U_{eff}}{I_{eff}}$ gegeben:

$$R = 150\,\Omega$$
$$L = 0{,}4\,H$$
$$f = 50\,Hz$$
$$U_{eff} = 220V$$
$$\omega = 2\pi f \approx 314{,}16\,s^{-1}$$

$$|\underline{Z}| = \sqrt{(R^2 + \omega L)^2} = \sqrt{150^2 + (314{,}16 \cdot 0{,}4)^2} \approx 195{,}69$$

$$\varphi = \arctan\left(\frac{\omega L}{R}\right) = \arctan\left(\frac{314{,}16 \cdot 0{,}4}{150}\right) \approx 39{,}95°$$

$$\underline{\underline{Z = 195{,}69 \cdot e^{j \cdot 39{,}95°}}}$$

Zu 2.: $$\underline{I} = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}} = \frac{220V \cdot e^{j \cdot 0°}}{195{,}59 \cdot e^{j \cdot 39{,}95°}} = 1{,}59\,e^{-j \cdot 39{,}95°}$$

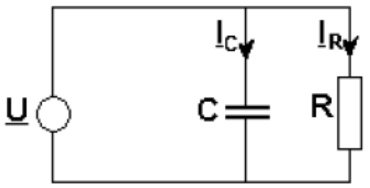
Zu 3.: U_R und I sind in Phase.

Zu 4.: U_L eilt dem Strom um 90°voraus.

Zu 5.: Siehe 3.1.: $\varphi = \arctan\left(\frac{\omega L}{R}\right) = \arctan\left(\frac{314{,}16 \cdot 0{,}4}{150}\right) \approx 39{,}95°$

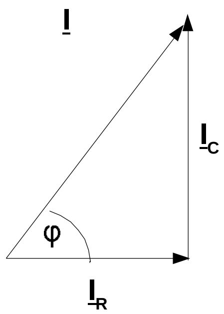
Aufgabe 4:

Ein Wirkwiderstand von R = 2 KΩund ein Kapazität C = 100 nF sind parallel an eine Spannungsquelle mit U = 100V, f = 1,4 KHz, angeschlossen.



1. *- Zeichnen Sie das Zeigerdiagramm der Teilströme.*
2. *- Wie groß sind die Teilströme I_R und I_C ?*
3. *- Welcher Strom wird von der Spannungsquelle geliefert ?*

Zu 1.:



$$R = 2000\,\Omega$$
$$C = 100\,nF$$
$$U = 100\,V$$
$$f = 1{,}4\,kHz$$

$$\varphi = \arctan \omega \frac{C}{\frac{1}{R}} = \underline{\underline{60{,}4}}°$$

Zu 2.:

$$\underline{I}_R = \frac{U}{R} = \frac{100\,V}{2\,k\,\Omega} = \underline{\underline{0{,}05}}\,A$$

$$\underline{I}_C = j\,\omega C \cdot \underline{U} = 100V \cdot j \cdot 2\pi \cdot 1{,}4\,kHz \cdot 100 \cdot 10^{-9}\,F = \underline{\underline{0{,}08796\,j\,A}}$$

Zu 3.:

$$\underline{I} = \underline{I}_R + \underline{I}_C = \underline{\underline{0{,}05\,A + 0{,}08796\,j\,A}}$$

$$|\underline{I}| = \sqrt{(0{,}05)^2 + (0{,}08796)^2}\,A = \underline{\underline{0{,}1012\,A}}$$

$$\tan\varphi = \frac{I_C}{I_R} \quad \Rightarrow \quad \varphi = \underline{\underline{60{,}39}}°$$