Aufgabe J4: X_i : „Anzahl der Anrufe pro Stunde“

$$X \sim P(\lambda=0{,}5)$$

X: „Anzahl der Anrufe pro Dienstzeit“
X = 6 X_i
$\rightarrow X \sim P(\lambda=6\cdot 0{,}5) \quad \Rightarrow \quad X \sim P(\lambda=3)$

$$P(X=x)=\frac{\lambda^x}{x!}e^{-\lambda}=\frac{3^x}{x!}e^{-3}$$

1.) a) $P(X=0)=\frac{3^0}{0!}e^{-3}=e^{-3}=0{,}0498$

b) $P(X\geq 3)=1-P(X<3)=1-P(X\leq 2)=1-0{,}4232=0{,}5768$

c) $P(X\leq 7)=0{,}9881$

2.) X_i: „Wartezeit bis zum ersten Alarm“

$X \sim \mathrm{Exp}(\lambda=0{,}5) \quad \Rightarrow \quad P(X\leq x)=1-e^{-\frac{1}{2}x}$

a) $P(X\leq 1)=1-e^{-\frac{1}{2}\cdot 1}=0{,}3935$

b) $P(X>2)=1-P(X\leq 2)=1-\left[1-e^{-\frac{1}{2}\cdot 2}\right]=e^{-1}=0{,}3679$

Die Exponentialverteilung hat die Eigenschaft der Gedächtnislosigkeit.
„Was davor passiert ist, interessiert nicht.“

c) Nur letzte Stunde interessiert, Lösung also bereits unter a)
$P(5\leq X\leq 6 \mid X>5)=P(X\leq 1)=0{,}3935$

3.) $P(X\leq a)=0{,}95$

$$\Rightarrow 1-e^{-\frac{1}{2}\cdot a}=0{,}95$$
$$\Rightarrow -e^{-\frac{1}{2}\cdot a}=-0{,}05$$
$$\Rightarrow e^{-\frac{1}{2}\cdot a}=0{,}05$$
$$\Rightarrow \ln\left(e^{-\frac{1}{2}\cdot a}\right)=\ln(0{,}05)$$
$$\Rightarrow -\frac{1}{2}a=-2{,}996$$
$$\Rightarrow a = 5{,}992 < 6$$

Er hat also recht!

Aufgabe J2 – B: X : „Anzahl der Ausfälle pro Stunde“
$X \sim P(\lambda=2)$

Wartezeit zwischen zwei poissonverteilten Ereignissen ist immer Exponentialverteilung!

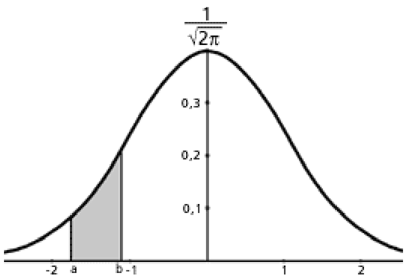
1.) Y: „Wartezeit in Stunden zwischen zwei Ausfällen.“
$Y \sim \mathrm{Exp}(\lambda=2)$

2.) $P(X>2)=1-P(X\leq 2)=1-\left(1-e^{-2\cdot 2}\right)=e^{-4}=0{,}01832$

3.) $\int_1^2 2\,e^{-2\cdot y}\,dy$ Wahrscheinlichkeit, dass man mindestens eine und höchstens zwei Stunden warten muss bis zum nächsten Ausfall.

4.) $P(Y_1<2\cap Y_2>2)=P(Y_1>2)\cdot P(Y_2>2)=e^{-4}\cdot e^{-4}=0{,}000335$

Normalverteilung



$X \sim N(\mu,\sigma^2)$

μ = Erwartungswert

σ^2 = Varianz

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\cdot e^{\left[-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right]}$$ Gauß!

Der e-Teil ist typisch für die Glockenfunktion, der Faktor davor dient der Normierung, damit die Dichtefunktion $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx=1$

Wenn $\mu=0$ und $\sigma^2=1$ dann haben wir die Standard-Normalverteilung.
(Symmetrie um den Nullpunkt, Varianz = 1)

<u>Standardisierung:</u> $X\sim N(\mu,\sigma^2)$

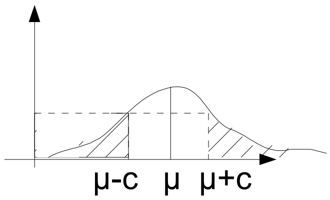
Dann sei $Z=\frac{X-\mu}{\sigma} \Rightarrow Z\sim N(0,1)$

$$F(x)=P(X\leq x)=P\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\leq\frac{x-\mu}{\sigma}\right)=P\left(Z\leq\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$

$$\rightarrow F(x)=\Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)\overset{[\xi=\frac{x-\mu}{\sigma}]}{=}\Phi(\xi)$$

Symmetrie:

$$f(\mu+c)=f(\mu-c)$$

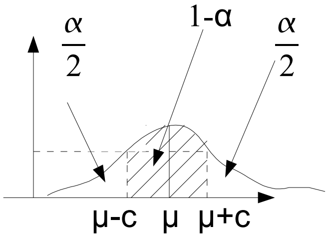


Bei Standard-Normalverteilung:

$$\Phi(-x)=1-\Phi(x)$$
$$\Rightarrow F(\mu-c)=1-F(\mu+c)$$

Quantile: Bsp.: 0,5-Quantil ist der Median.
0,25-Quantil ist das erste Quartil, 25% der Werte sind kleiner, 75% größer.

Zentrales Schwankungsintervall (ZSI):



$$\mu-c\le x\le\mu+c$$

$$P(\mu-c\le x\le\mu+c)=1-\alpha$$

Lineare Transformation: $X\sim N(\mu,\sigma^2)$
Sei $Y=ax+b$
$Y\sim N(a\mu+b,a^2\sigma^2)$

Addition:

$$\left.\begin{Bmatrix} X\sim N(\mu_x,\sigma_x^2) \\ Y\sim N(\mu_y,\sigma_y^2)\end{Bmatrix}\right. \Rightarrow X+Y\sim N(\mu_x+\mu_y,\sigma_x^2+\sigma_y^2)$$

Aufgabe J1: $X\sim N(\mu=6,\sigma^2=0{,}16)$

2% von 6 = 0,12 mm

$$\begin{aligned}
P(|x-\mu|>0{,}12)&=1-P(|x-\mu|\le 0{,}12)\\
&=1-[P(\mu-0{,}12\le x\le\mu+0{,}12)]\\
&=1-\left[P\left(\frac{(\mu-0{,}12)-\mu}{\sigma}\le\frac{x-\mu}{\sigma}\le\frac{(\mu+0{,}12)-\mu}{\sigma}\right)\right]\\
&=1-\left[P\left(\frac{-0{,}12}{0{,}4}\le z\le\frac{0{,}12}{0{,}4}\right)\right]\\
&=1-[P(-0{,}3\le z\le 0{,}3)]\\
&=1-[P(z\le 0{,}3)-P(z\le -0{,}3)]\\
&=1-[\Phi(0{,}3)-\Phi(-0{,}3)]\\
&=1-[\Phi(0{,}3)-[1-\Phi(0{,}3)]]\\
&=2-2\cdot\Phi(0{,}3)\\
&=2-2\cdot 0{,}6179=\underline{\underline{0{,}7642}}
\end{aligned}$$