Aufgabe B6: 3) gute Schätze sind erwartungstreu.

$E(\hat{\mu}) = \mu$

Bei vielen Versuchen bekommen wir im Mittel den Mittelwert μ heraus. Aber bei einem einzelnen Versuch muss das Ergebnis nicht unbedingt μ sein.

4)a)

$$\hat{\mu}_1 = X_7$$
$$\rightarrow \mathrm{Var}(\hat{\mu}_1) = \mathrm{Var}(X_7) = \underline{\underline{\sigma^2}}$$

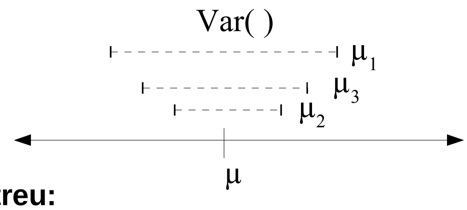
b)

$$\hat{\mu}_2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$
$$\rightarrow \mathrm{Var}(\hat{\mu}_2) = \mathrm{Var}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} \mathrm{Var}\, X_i = \frac{1}{n^2}(n \cdot \sigma^2) = \underline{\underline{\frac{\sigma^2}{n}}}$$

c)

$$\hat{\mu}_3 = \frac{4}{5} X_7 + \frac{1}{5}\left(\frac{1}{6}\sum_{i=1}^{6} X_i\right)$$
$$\rightarrow \mathrm{Var}(\hat{\mu}_3) = \mathrm{Var}\left[\frac{4}{5} X_7 + \frac{1}{5}\left(\frac{1}{6}\sum_{i=1}^{6} X_i\right)\right] = \frac{4^2}{5^2}\mathrm{Var}\, X_7 + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2}\sum_{i=1}^{6}\mathrm{Var}\, X_i = \frac{4^2}{5^2}\sigma^2 + \frac{1}{5^2}\frac{\sigma}{6} = \underline{\underline{\frac{97}{150}\sigma^2}}$$

$\rightarrow \mathrm{Var}(\hat{\mu}_2) < \mathrm{Var}(\hat{\mu}_3) < \mathrm{Var}(\hat{\mu}_1)$ Schätzer mit kleiner Varianz sind besser!



Erwartungstreu:

Sei T ein Schätzer für Θ. T ist Erwartungstreu, wenn gilt: E(T) = Θ.

Bias oder Verzerrung:

Bias (T) = E(T) – Θ => Bei erwartungstreuen Schätzer ist Bias(T) = 0.

Asymptotisch erwartungstreu: (sehr großer Stichprobenumfang nötig)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E(T) = \Theta$$

Guter Schätzer:

Ein guter Schätzer ist erwartungstreu und besitzt eine kleine Varianz, aber es kann vorkommen, dass eine nicht erwartungstreue Schätzfunktion besser ist, nämlich genau dann, wenn die nicht erwartungstreue Schätzfunktion asymptotisch erwartungstreu ist und eine kleinere Varianz besitzt.

[Seien T_1 und T_2 Schätzungsfunktionen für Θ mit
- $E(T_1) = \Theta$
- $E(T_2) \neq \Theta$, aber $\lim_{n\to\infty} E(T_2) = \Theta$
- $Var(T_2) < Var(T_1)$

→ T_2 ist bessere Schätzfunktion für Θ als T_1]

Mittlere Quadratische Abweichung (MSE):

$$
\begin{aligned}
MSE &= E\left[(T-\Theta)^2\right] \\
&= E\left[(T-E(T)+E(T)-\Theta)^2\right] \\
&= E\left[(T-E(T))^2+2\cdot(T-E(T))\cdot(E(T)-\Theta)+(E(T)-\Theta)^2\right] \\
&= E\left[(T-E(T))^2\right]+2\cdot\left[E(T)-E(E(T))\right]\cdot\left[E(E(T))-E(\Theta)\right]+E\left[(E(T)-\Theta)^2\right] \\
&= E\left[(T-E(T))^2\right]+0+E\left[(E(T)-\Theta)^2\right] \\
&= E\left[Var\ (T)\right]+E\left[Bias\ (T\ )\right]^2 = MSE \\
&= Var\ (T)+\left[Bias\ (T\ )\right]^2
\end{aligned}
$$

MSE-Konsistenz:

$\lim_{n\to\infty} MSE = 0$ [Leichter als der Beweis der MSE]

2 Bedingungen:

1) $\lim_{n\to\infty} E(T) = \Theta$ asymptotisch erwartungstreu

2) $\lim_{n\to\infty} Var\ (T) = 0$ asymptotisch verschwindende Varianz

Aus 1) und 2) folgt MSE-Konsistenz und umgekehrt.

Effizienz und Wirksamkeit:

Seien T_1 und T_2 Schätzer mit $Var(T_1) < Var(T_2)$

→ T_1 ist wirksamer als T_2

effizient: der Schätzer mit der größten Wirksamkeit, also der kleinsten Varianz.

<u>Beispiele:</u>

1.
$$
\hat{\alpha}_1 = \begin{cases} \alpha & \text{mit } P(\hat{\alpha}_n = \alpha) \quad = 1-\frac{1}{n} \\ \alpha - 1 & \text{mit } P(\hat{\alpha}_n = \alpha-1) = \frac{1}{n} \end{cases}
$$

$$
\begin{aligned}
E(\hat{\alpha}_n) &= \alpha\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)+(\alpha-1)\cdot\frac{1}{n} \\
&= \alpha-\frac{\alpha}{n}+\frac{\alpha}{n}-\frac{1}{n} \;=\; \alpha-\frac{1}{n} \;\neq\; \alpha
\end{aligned}
$$

nicht erwartungstreu

$$\lim_{n\to\infty} E(\hat{\alpha}_n) \;=\; \lim_{n\to\infty}\left(\alpha-\frac{1}{n}\right) \;=\; \alpha$$

asymptotisch erwartungstreu

$$Var\ (\hat{\alpha}_n) = E(\hat{\alpha}_n^2)-\left[E(\hat{\alpha}_n)\right]^2$$

$$E(\hat{\alpha}_n^2)=\alpha^2\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)+(\alpha-1)^2\cdot\frac{1}{n}$$
$$=\alpha^2-\frac{\alpha^2}{n}+\frac{\alpha^2}{n}-\frac{2\cdot\alpha}{n}+\frac{1}{n}$$
$$=\alpha^2-\frac{2\cdot\alpha}{n}+\frac{1}{n}$$
$$\left[E(\hat{\alpha}_n)\right]^2=\left(\alpha-\frac{1}{n}\right)^2=\alpha^2-\frac{2\cdot\alpha}{n}+\frac{1}{n^2}$$
$$\Rightarrow\quad Var(\hat{\alpha}_n)=\alpha^2-\frac{2\cdot\alpha}{n}+\frac{1}{n}-\alpha^2+\frac{2\cdot\alpha}{n}-\frac{1}{n^2}$$
$$=\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}$$
$$\rightarrow\lim_{n\to\infty}Var(\hat{\alpha}_n)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}\right)=0$$

➔ asymptotisch verschwindende Varianz

$\Rightarrow$ $\hat{\alpha}_n$ ist MSE-konsistent.

2. $$\hat{\alpha}_1=\begin{cases}\alpha & \text{mit } P(\hat{\alpha}_n=\alpha)\quad=1-\frac{1}{n}\\ \alpha+n & \text{mit } P(\hat{\alpha}_n=\alpha+n)=\frac{1}{n}\end{cases}$$

$$E(\hat{\alpha}_n)=\alpha\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)+(\alpha+n)\cdot\frac{1}{n}$$
$$=\alpha-\frac{\alpha}{n}+\frac{\alpha}{n}+\frac{n}{n}=\alpha+\frac{n}{n}=\alpha+1\neq\alpha$$ nicht erwartungstreu

$$\lim_{n\to\infty}E(\hat{\alpha}_n)=\lim_{n\to\infty}(\alpha+1)=\alpha+1$$ nicht asympt. erwartungstreu

Hieraus folgt schon: nicht MSE-konsistent.

Zur Übung:

$$Var(\hat{\alpha}_n)=E(\hat{\alpha}_n^2)-\left[E(\hat{\alpha}_n)\right]^2$$
$$E(\hat{\alpha}_n^2)=\alpha^2\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)+(\alpha+n)^2\cdot\frac{1}{n}$$
$$=\alpha^2-\frac{\alpha^2}{n}+\frac{\alpha^2}{n}+\frac{2\cdot\alpha\cdot n}{n}+\frac{n^2}{n}$$
$$=\alpha^2+2\cdot\alpha+n$$
$$\left[E(\hat{\alpha}_n)\right]^2=(\alpha+1)^2=\alpha^2+2\cdot\alpha+1$$
$$\Rightarrow\quad Var(\hat{\alpha}_n)=\alpha^2+2\cdot\alpha+n-\alpha^2-2\cdot\alpha-1$$
$$=n-1$$
$$\rightarrow\lim_{n\to\infty}Var(\hat{\alpha}_n)=\lim_{n\to\infty}(n-1)=\infty$$

$\Rightarrow$ $\hat{\alpha}_n$ ist nicht MSE-konsistent.

3. $$\hat{\alpha}_1=\begin{Bmatrix}\alpha+1 & \text{mit } P(\hat{\alpha}_n=\alpha+1)=\frac{1}{2}\\ \alpha-1 & \text{mit } P(\hat{\alpha}_n=\alpha-1)=\frac{1}{2}\end{Bmatrix}$$

$$E(\hat{\alpha}_n) = (\alpha+1)\cdot\left(\frac{1}{2}\right) + (\alpha-1)\cdot\frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\alpha + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\alpha - \frac{1}{2} \;=\; \underline{\underline{\alpha}}$$ → erwartungstreu

$$\lim_{n\to\infty} E(\hat{\alpha}_n) \;=\; \lim_{n\to\infty}(\alpha) \;=\; \alpha$$ → asympt. erwartungstreu

$$Var(\hat{\alpha}_n) = E(\hat{\alpha}_n^2) - \left[E(\hat{\alpha}_n)\right]^2$$

$$E(\hat{\alpha}_n^2) = (\alpha+1)^2\cdot\frac{1}{2} + (\alpha-1)^2\cdot\frac{1}{2}$$

$$= \frac{\alpha^2}{2} + \frac{2\cdot\alpha}{2} + \frac{1}{2} + \frac{\alpha^2}{2} - \frac{2\cdot\alpha}{2} + \frac{1}{2}$$

$$= \alpha^2 + 1$$

$$\left[E(\hat{\alpha}_n)\right]^2 = \alpha^2$$

$$\Rightarrow \quad Var(\hat{\alpha}_n) = \alpha^2 + 1 - \alpha^2 = \underline{1}$$

$$\to \lim_{n\to\infty} Var(\hat{\alpha}_n) = \lim_{n\to\infty}(1) = \underline{\underline{1}}$$ → keine asympt. verschwindende Varianz

$\Rightarrow$ $\hat{\alpha}_n$ ist nicht MSE-konsistent.

Aufgabe B10 [B11]:

R_i : „Messung des i-ten Mitarbeiters“

$R_i = r + U_i$ mit beliebig verteiltenm U_i

$E(U_i) = 0$, $Var(U_i) = \sigma^2$

a)

$$E(R_i) = E(r + U_i) = r + E(U_i) = r$$

$$Var(R_i) = Var(r + U_i) = 0 + \sigma^2 = \sigma^2$$

Schätzfunktion:

$$\hat{\Theta}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} R_i$$

$$E(\hat{\Theta}_n) = E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} R_i\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(E(R_i)) = \frac{1}{n}\cdot(n\cdot r) = r = \theta_n$$

→ $\hat{\Theta}_n$ ist erwartungstreu.

b) **Konsistenz:**

1) asympt. erwartungstreu

2) $\lim_{n\to\infty} Var(\hat{\Theta}_n) = 0$

zu 1) $\hat{\Theta}_n$ ist erwartungstreu, also ist $\hat{\Theta}_n$ auch asympt. erwartungstreu.

zu 2) $$Var\,\hat{\Theta}_n = Var\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} R_i\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} Var(R_i) = \frac{1}{n^2}\cdot(n\cdot\alpha^2) = \frac{\alpha^2}{n}$$

$$\lim_{n\to\infty} Var(\hat{\Theta}_n) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sigma^2}{n}\right) = 0$$

→ $\hat{\Theta}_n$ ist MSE-konsistent.