Weiter zu **Aufgabe B10 [bzw. B11]:**

Aufgabenteil A:

1) $\hat{\Theta}_1 = \bar{R} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} R_i$

2) Gegeben ist $\hat{\Theta}_2$ für $\theta_2 = \pi r^2$.

$\hat{\Theta}_2 = \pi \bar{R}^2 = \pi \hat{\Theta}_1^2$

b) $E(\hat{\Theta}_2) = E(\pi \hat{\Theta}_1^2) = \pi E(\hat{\Theta}_1^2) = \underline{\underline{\pi E(\bar{R}^2)}}$

$\mathrm{Var}(\bar{R}) = E(\bar{R}^2) - E(\bar{R})^2 \rightarrow E(\bar{R}^2) = \mathrm{Var}(\bar{R}) + E(\bar{R})^2 = \underline{\underline{\frac{\sigma^2}{n} + r^2}}$

$\rightarrow E(\hat{\Theta}_2) = \pi \cdot \left(\frac{\sigma^2}{n} + r^2\right) = \underline{\underline{\frac{\pi \cdot \sigma^2}{n} + \pi r^2}}$ → nicht erwartungstreu.

$\lim_{n\rightarrow\infty} E(\hat{\Theta}_2) = \lim_{n\rightarrow\infty} \frac{\pi \cdot \sigma^2}{n} + \pi r^2 = \underline{\underline{\pi r^2}} = \theta_2$ → asymptotisch erwartungstreu

3) $\hat{\Theta}_3 = \hat{\Theta}_2 - \frac{\pi \cdot \sigma^2}{n}$

$E(\hat{\Theta}_3) = E(\hat{\Theta}_2) - E\left(\frac{\pi \cdot \sigma^2}{n}\right) = \frac{\pi \cdot \sigma^2}{n} + \pi r^2 - \frac{\pi \cdot \sigma^2}{n} = \underline{\underline{\pi r^2}}$

4) $\hat{\Theta}$ → Schätzfunktion

$\hat{\theta}$ → Schätzfunktion mit Werten, bzw. Schätzwert

5) $\hat{\theta}_1 = \frac{1}{10} \cdot (11+13+12+12+12+4+12+11+11+12) = \frac{110}{10} = \underline{\underline{11}}$

$\hat{\theta}_2 = \pi r^2 = 3{,}14 \cdot 121 \approx \underline{\underline{380}}$

$\hat{\theta}_3 = \pi \cdot \left(r^2 - \frac{6{,}44}{10}\right) \approx \underline{\underline{378}}$

Aufgabenteil B:

1) $\theta_1 = 12 \Rightarrow \theta_2 = \pi \cdot 12^2 = \underline{\underline{452{,}16}}$

2) → 4 ist ein Ausreißer. Ohne diesen Wert ergibt sich $\hat{\theta}_1 = 11{,}78$

---

1. Maximum Likelihood Prinzip (ML)
2. kleinste Quadrate Methode (kQ-Methode)

ML-Prinzip

Sei $X_1, X_2, X_3, \ldots, X_i$ i.i.d ZV

(X_i sind beliebig verteilt) z.B.:

$X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$

$X_i \sim P(\lambda)$

$X_i \sim B(n, \pi)$

Sei (x_1, x_2, x_3, ..., x_n) eine Stichprobe.

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n|\Theta) = f(x_1|\Theta) \cdot f(x_2|\Theta), \dots, f(x_n|\Theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i|\Theta) = L(\Theta)$$

ML-Prinzip: $L(\Theta)$ maximieren

Vorgehensweise:

1) $L(\Theta)$ bilden,
2) $L(\Theta)$ logarithmieren,
3) $L(\Theta)$ ableiten,
4) Ableitung gleich null setzen und lösen nach Θ.

[mögliche Klausurfrage: Weshalb darf man logarithmieren?
Antwort: log-Funktion ist monoton steigend, d.h. Maximum von $L(\Theta)$ bleibt unverändert, allerdings wird die Ableitund bedeutend vereinfacht.]

Nebenbedingung: für stetige Funktionen: $f(x_i|\theta)$ →Dichtefunktion
für diskrete Funktionen: $f(x_i|\theta)$ →Wahrscheinlichkeits-funktion

---

Aufgabe B14:

1)
$$f(yi) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda y} & \text{für } y \geq 0 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

$$L(\lambda) = \prod_{i=1}^{n} f(y_i) = \lambda \cdot e^{-\lambda y_1} \cdot \lambda \cdot e^{-\lambda y_2} \cdot \ldots \cdot \lambda \cdot e^{-\lambda y_n} = \lambda^n \cdot e^{-\lambda \sum_{i=1}^{n} y_i}$$

$$\ln(L(\lambda)) = n \cdot \ln(\lambda) + (-\lambda \sum_{i=1}^{n} y_i) = n \cdot \ln(\lambda) - \lambda \sum_{i=1}^{n} y_i$$

$$\frac{d \ln(\lambda)}{dy} = \frac{n}{\lambda} - \sum_{i=1}^{n} y_i \overset{!}{=} 0$$

$$\rightarrow \frac{n}{\lambda} = \sum_{i=1}^{n} y_i \quad \rightarrow \quad \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} y_i$$

$$\rightarrow \hat{\lambda} = \frac{1}{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} y_i}$$

2) Stichprobe: {5,6,8,6,10}

$$\rightarrow \frac{1}{n} \sum y_i = \frac{1}{5}(5+6+8+6+10) = \frac{1}{5} \cdot (35) = 7$$

$$\rightarrow \hat{\lambda} = \frac{1}{\frac{1}{n} \sum y_i} = \frac{1}{\underline{\underline{7}}}$$

Aufgabe B15:

1) verloren, gewonnen, verloren, kein Gewinn/Verlust, gewonnen, gewonnen.

2)
$$P(X=0) = \pi$$
$$P(X=-1) = \pi$$
$$P(X=+1) = 1-2\pi$$

3)

x =	*-1*	*0*	*1*
h(x)	2	1	3
f(x)	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$

$$\Rightarrow \begin{array}{l} P(X=-1)=\frac{1}{3} \\ P(X=\ 0)=\frac{1}{6} \\ P(X=\ 1)=\frac{1}{2} \end{array}$$

4)

$$P(X_1=-1, X_2=1, X_3=-1, X_4=0, X_5=1, X_6=1)$$
$$\overset{\text{unabh.}}{=} \prod_{i=1}^{6} P(X_i=x_i)$$
$$=\pi\cdot(1-2\pi)\cdot\pi\cdot\pi\cdot(1-2\pi)\cdot(1-2\pi)$$
$$=\underline{\underline{\pi^3\cdot(1-2\pi)^3}}$$

5)

$$L(\pi,(-1,1,-1,0,1,1))=\prod_{i=1}^{6} f(x)=\prod_{i=1}^{6} P(X_i=x_i)$$
$$=\pi^3(1-2\pi)^3$$

6)

$$\ln(L(\pi))=3\cdot\ln\pi+3\cdot\ln(1-2\pi)=3\cdot(\ln\pi+\ln(1-2\pi))$$

$$\frac{d\ \ln(L(\pi))}{d\ \pi}=\frac{3}{\pi}+\frac{3}{1-2\pi}\cdot(-2)=\frac{3}{6}-\frac{6}{1-2\pi}\overset{!}{=}0$$
$$\Rightarrow\frac{3}{\pi}=\frac{6}{1-2\pi}\Leftrightarrow 3-6\pi=6\pi\Leftrightarrow 12\pi=3\Leftrightarrow\hat{\pi}_{ML}=\frac{3}{12}=\underline{\underline{\frac{1}{4}}}$$

7)

$$\mu=\sum_{i=1}^{n} x_i P(X=x)$$
$$=0\cdot\pi+(-1)\cdot\pi+1\cdot(1-2\pi)$$
$$=\underline{\underline{1-3\pi}}$$
$$KQ(\pi)=\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2$$
$$=2\cdot[-1-(1-3\pi)]^2+[0-(1-3\pi)]^2+3\cdot[1-(1-3\pi)]^2$$
$$=2\cdot(4-12\pi+9\pi^2)+1-6\pi+9\pi^2+3\cdot9\pi^2$$
$$=8-24\pi+18\pi^2+1-6\pi+9\pi^2+27\pi^2$$
$$=9-30\pi+54\pi^2$$
$$\rightarrow\quad KQ(\pi)=9-30\pi+54\pi^2$$

1. Ableitung: $108\pi-30\overset{!}{=}0$

$$\Rightarrow\pi=\frac{30}{108}=\frac{5}{18}\approx\underline{\underline{0{,}278}}$$

<u>Aufgabe B6 [bzw. B22]:</u>

1) ... aller <u>möglichen</u> Realisationen... → falsch
2) nicht einmal ansatzweise möglich. → falsch
3) <u>Streuung</u> muss man kennen → falsch
4) Parameter sind bekannt. → richtig
5) approximativ normalverteilt ab n > 30 → falsch
6) z.B. Aufgabe B4 → falsch
7) → richtig
8) → richtig
9) → falsch