Wirtschaftsmathematische Zusätze für Wirtschaftsingenieure

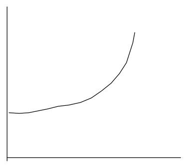
Skript: im Sekretariat, FR 6. Stock, bei Frau Strass erhältlich, Kosten: 2 Euro
Aufgaben der Theoriestunden sind im Netz auf der Lehrstuhlseite
http://stat.cs.tu-berlin.de/lehre/wima

Klausur: 9.7.04 , nicht vor 16.00 Uhr.
Relevant sind die Aufgaben der Theoriestunden, Rechnerübungen dienen nur der Zulassung zur Klausur.

<u>Theorie:</u> Aufgaben der Finanzmathematik
Heute: Differenzengleichungen, Differentialgleichungen

Beschreibung von Wachstumsprozessen, bei denen das Wachstum proportional zum jeweiligen Bestand ist.

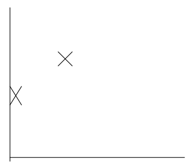
Stetiges Wachstum
(z.B bei Zellkulturen)



$$B'(t) = \frac{d\,B(t)}{dt} = k \cdot B(t)$$

Differentialgleichung

diskretes Wachstum
(z.B. Zinsen)



$$y_{t+1} = (1+r)\,y_t$$

Differenzengleichung

<u>Klassifizierungsmerkmale:</u>

1. Ordnung — bei uns nur 1. Ordnung
2. Grad — bei uns nur linear
3. gewöhnlich/partiell — keine anderen unabhängigen Variablen
4. homogen/inhomogen — beides, mit konstanten Summanden
5. konstante/variable Koeffizienten — bei uns nur konstante Koeffizienten

Beispiele: allgemein: $B'(t) = k \cdot B(t)$

1. $B''(t) = k \cdot B(t)$ <- 2. Ordnung
2. $B'(t)^2 = k \cdot B(t)$ <- nicht linear
3. $B'(t,x,y,z) = k \cdot B(t,x,y,z)$ <- mehrere unabhängige Variablen
4. $B'(t) = k \cdot B(t) + c$ <- inhomogene DGL
5. $B'(t) = k \cdot B(t)$, k ist fest <- konstanter Koeffizient

<u>Vorgehensweise:</u>
zuerst eine allgemeine Lösung finden
dann die spezielle Lösung berechnen

1. allgemeine Lösung einer Differenzengleichung (1. Ordnung, linear, gewöhnlich, homogen, konstanter Koeffizient)

$$\boxed{\begin{array}{c} \Delta y = r \cdot y_t \\ y_{t+1} - r \cdot y_t \\ y_{t+1} = (1+r)\,y_t \\ \Rightarrow y_t = y_0 (1+r)^t \end{array}}$$

allgemeine Lösung

$$y_1 = (1+r)\,y_0$$
$$y_2 = (1+r)\,y_1$$
$$\Leftrightarrow y_2 = (1+r)^2\,y_0$$
$$\Rightarrow y_t = (1+r)^t\,y_0$$

2. allgemeine Lösung Differentialgleichung (1. Ordnung, linear, gewöhnlich, homogen, konstanter Koeffizient)

$$B'(t) = \frac{d\,B(t)}{dt} = k \cdot B(t)$$

1. Umstellen
$$\frac{d\,B(t)}{B(t)} = k \cdot dt$$
2. Integration
$$\int \frac{d\,B(t)}{B(t)} = \int k \cdot dt$$
3. Stammfunktion
$$\ln B(t) + c_1 = k\,t + c_2$$
4. Umstellen
$$\ln B(t) = k\,t + c_2 - c_1 = k\,t \cdot \ln(c)$$
(Zusammenfassung der Konstanten für den nächsten Schritt.)
5. e-Funktion
$$\boxed{\begin{array}{l} e^{\ln B(t)} = e^{kt + \ln c} \\ \Rightarrow B(t) = c \cdot e^{kt} \end{array}} \leftarrow$$ allgemeine Lösung

---

<u>Roter Faden – Aufgaben:</u>

Erste Aufgabe: Teil a) [Differenzengleichungen]

1)
$$y_{t+1} = (1-b)\,y_t$$
$$\Rightarrow y_t = (1-b)^t \cdot y_0$$
b: Anteil des täglichen ausfliessenden Öls am Gesamtbestand

2) Wieviel Öl ist nach 10 Tagen noch im Tanker?
-> zuerst b bestimmen:

$$b: y_{65} = (1-b)^{65} \cdot 72.000\,l \qquad y_{65} = 72.000\,l - 20.000\,l = 52.000\,l$$
$$52.000 = (1-b)^{65} \cdot 72.000$$
$$\Rightarrow \frac{52}{72} = (1-b)^{65} \Rightarrow \sqrt[65]{\frac{52}{72}} = 1-b$$
$$\Rightarrow b = 1 - \sqrt[65]{\frac{52}{72}} \simeq 0.005$$
$$y_{10} = (1-0{,}005)^{10} \cdot 72.000 = 68485$$
$$x = y_0 - y_{10} = 3515$$

3)
$$45.000 = (1-b)^t\, 72.000$$
$$\frac{45}{72} = (1-b)^t$$
$$\ln \frac{45}{72} = \ln(0.995)^t = t \cdot \ln 0{,}995$$
$$\Rightarrow t = \frac{\ln \frac{45}{72}}{0{,}995} \simeq 93{,}95$$
Nach 93 Tagen sind also noch mindestens 45.000 Liter Öl im Tanker

2. Aufgabe: [Differentialgleichungen]

Intraplan Consult:

1) $y'(t) = k \cdot y(t) \rightarrow y(t) = c \cdot e^{kt}$ (s.o.)

2) $y(0) = c \cdot e^{k \cdot 0} \rightarrow y(0) = c \rightarrow c = 4.000.000$

$y(7) = 4.000.000 \cdot e^{k \cdot 7}$

$\frac{15}{4} = e^{k \cdot 7} \Rightarrow \ln 3{,}75 = k \cdot 7 \Rightarrow k = \frac{\ln 3{,}75}{7} = 0{,}188$

Die stetige jährliche Wachstumsrate beträgt also 18,8%

[Aber nicht die diskrete Wachstumsrate. $y(7) \neq (1 + 0{,}188)^7 \cdot y_0$]

3) $y(17) = 4.000.000 \cdot e^{k \cdot 17} = 97.738.384$ Das Modell scheint nicht realistisch zu sein.

4) $y'(t) = a(B - y(t))$

$\Rightarrow y'(t) = -a\,y(t) + a \cdot B$

(1. Ordnung, linear, gewöhnlich, homogen, konstanter Koeffizient)

$\boxed{y(t) = B + c\,e^{at}}$

$y(t) = B + y_0 \cdot e^{-at} = 20.000.000 + 4.000.000\,e^{-0{,}1 \cdot t}$