Wirtschaftsmathematische Zusätze für Wirtschaftsingenieure

Roter Faden – Aufgaben:

Finanzmathematik:

1.) allgemein: $K_E = (1+r)^t \cdot K_A$

Hier: $K_E = (1{,}05)^6 \cdot 800\,€ = 1072{,}08\,€$

2.) $2000\,€ = (1{,}05)^5 \cdot K_A \quad \Rightarrow \quad K_A = \dfrac{2000\,€}{1{,}34} = 1492{,}43\,€$

3.) $1{,}03 \cdot 1{,}03 = 1{,}0609 \quad \Rightarrow \quad r_{\text{eff}} = 6{,}09\,\%$

4.) $1{,}005^{12} = 1{,}06168 \quad \Rightarrow \quad r_{\text{eff}} = 6{,}17\,\%$

Rentenrechnung:

1.) $12{,}7\,\% \quad \text{p.a.} \quad \rightarrow \quad (1{,}127)^{\frac{1}{12}} \quad \left(= \sqrt[12]{1{,}127}\right) = 1{,}01 \quad \Rightarrow \quad r_{\text{mtl.}} = 1\,\%$

2.) (nachschüssige Zahlungen)

$$K_A \cdot (1{,}01)^{24} + \sum_{i=0}^{23} z(1{,}01)^i = K_E$$

$$\Rightarrow 10260\,€ \cdot (1{,}01)^{24} + \sum_{i=0}^{23} z(1{,}01)^i = 40000\,€$$

$$\Leftrightarrow 10260\,€ \cdot (1{,}01)^{24} + \frac{1{,}01^{24} - 1}{1{,}01 - 1} \cdot z$$

$$\Leftrightarrow 13027{,}48\,€ + 26{,}973\,z = 40000\,€$$

$$\Leftrightarrow 26{,}973\,z = 26972{,}52\,€$$

$$\Rightarrow z = 999{,}98\,€ \approx 1000\,€$$

allgemein: $K_E = K_A \cdot (1+r)^n + \left(\dfrac{(1+r)^n - 1}{(1+r) - 1}\right) \cdot z$

(n: Perioden, r: Zins, z: Zahlungen)

3.) $K_E = K_A (1+r)^n + z \cdot \left(\dfrac{(1+r)^n - 1}{(1+r) - 1}\right) \quad \text{mit } K_E = 0, K_A = 40000\,€, z = -1362\,€$

$$\Rightarrow 0 = 40000\,€ \cdot (1{,}01)^n + (-1362) \cdot \left(\frac{(1{,}01)^n - 1}{0{,}01}\right)$$

$$\Rightarrow 0 = 40000\,€ \cdot (1{,}01)^n - 136200\,€(1{,}01)^n + 136200\,€$$

$$\Rightarrow 96200\,€ \cdot (1{,}01)^n = 136200\,€$$

$$\Rightarrow \ln(1{,}01)^n = \ln\frac{1362}{962}$$

$$\Rightarrow n \approx 34{,}945$$

Sie würde knapp 35 Monate mit dem Geld auskommen.

4.) $K_{t+1} = 1{,}01\,K_t + z \cdot (1{,}005)^t$ variable Inhomogenität : $(z \cdot q^t)$

Theorie: $y_{t+1} = 1 y_t + b\, m^t$ Differenzengleichung

$$y_t = y_0 a^t + b \frac{a^t - m^t}{a - m}$$

Lösung der Differenzengleichung.
allgemeiner Fall von oben (siehe 3.) [m=1]

5.)

$$\mathrm{K}_t = \mathrm{K}_\mathrm{A} \cdot (1{,}01)^t + z \cdot \left(\frac{1{,}01^t - 1{,}005^t}{1{,}01 - 1{,}005} \right)$$

$$\mathrm{K}_t = \mathrm{K}_\mathrm{A} \cdot (1{,}01)^t + 200 \cdot z \cdot (1{,}01^t - 1{,}005^t)$$

1.Ordnung, linear, gewöhnlich, inhomogen mit variabler Inhomogenität, konst. Koeffizienten

6.)

$$z = -1362\,;\, t = 32$$

$$\mathrm{K}_{32} = 40000\,€ \cdot 1{,}01^{32} + 200 \cdot (-1362) \cdot (1{,}01^{32} - 1{,}005^{32})$$

$$\approx 54997{,}63\,€ - 54969{,}90\,€ = 73\,\mathrm{ct}$$

Differenzengleichungen

Teil b) : $z_{t+1} = z_t \cdot (1 - 0{,}3) + y_{t-1} \cdot b$

Dabei ist $y_{t-1} \cdot b$ nach Definition der Teil des Öls, der am Tag t ausläuft.

alternativ:

$$\begin{aligned} z_{t+1} &= z_t \cdot (1 - 0{,}3) + (y_{t-1} - y_t) \\ &= z_t \cdot 0{,}7 + (y_0 \cdot (1-b)^{t-1} - y_0 (1-b)^t) \\ &= z_t \cdot 0{,}7 + y_0 \cdot (1-b)^{t-1} \cdot b \\ &= z_t \cdot 0{,}7 + \frac{y_0 \cdot b}{(1-b)} \cdot (1-b)^t \end{aligned}$$

Theorie: $y_{t+1} = y_t \cdot \ a \ + \ b \ \cdot \ m^t$ var. Inhomogenität der Form $b \cdot m^t$

$$\rightarrow z_t = z_0 \cdot 0{,}7 + \frac{y_0 \cdot b}{1-b} \cdot \frac{(1-b)^t - 0{,}7^t}{(1-b) - 0{,}7}$$

mit $z_0 = 0$ ergibt sich:

$$z_t = \frac{y_0 \cdot b}{1-b} \cdot \frac{0{,}995^t - 0{,}7^t}{0{,}295}$$

$$= \frac{y_0 \cdot 0{,}005}{0{,}995 \cdot 0{,}295} \cdot (0{,}995^t - 0{,}7^t)$$

$$z_1 \approx 0{,}005\, y_0 = 0{,}005 \cdot 72000 = 360$$

z_1 ist das Öl, das am ersten Tag ausfliesst.