Wirtschaftsmathematische Zusätze für Wirtschaftsingenieure

Funktionen mehrer Veränderlicher

Bsp.: Cobb-Douglas Produktionsfunktion $x = f(r_1, r_2)$

r_1, r_2: Produktionsfaktoren

Output = f(Input) Input ist abhängig von verschiedenen Faktoren

$\boxed{x = a \cdot r_1^{\alpha} r_2^{\beta}}$

z.B.: $10 \cdot r_1^{1/4} r_2^{3/4}$ $\alpha + \beta = 1$: konstante Skalenerträge

1) Darstellungsformen:
   1. Tabelle mit Funktionswerten
   2. 3-D-Diagramm
   3. Höhenliniendiagramm
   4. Schnittkurven bei Festhalten einer Variable ➔ y = f(x)

2) Steigung einer Funktion mit zwei Veränderlichen

   Die Steigung ist abhängig von der Richtung, in der sie in einem Punkt betrachtet wird. Die Steigung entlang einer Höhenlinie ist Null.

Steigung entlang r_1

$$\frac{\partial x}{\partial r_1} = 2{,}5 \cdot r_1^{-3/4} r_2^{3/4}$$

Steigung entlang r_2

$$\frac{\partial x}{\partial r_2} = 7{,}5 \cdot r_1^{1/4} r_2^{-1/4}$$

➔ partieller Differentialquotient

$\frac{\partial}{\partial r}$ partieller Differentialoperator

$\partial x, \partial r_1, \partial r_2$ Differentiale

Steigung im Punkt $r_1 = 10$, $r_2 = 10$:

Steigung entlang r_1:

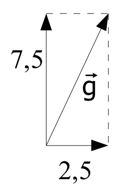
$$\frac{\partial x}{\partial r_1}(10,10) = 2{,}5 \cdot 10^{-3/4} 10^{3/4} = 2{,}5 \cdot 10^0 = 2{,}5$$

Steigung entlang r_2:

$$\frac{\partial x}{\partial r_2} = 7{,}5$$

Begriff: **Gradient:** <u>Vektor</u> dessen Komponenten aus den partiellen Ableitungen einer Funktion mehrerer Veränderlicher besteht.
Geometrisch stellt der Gradient die Richtung des stärksten Anstiegs von f dar.

$$\vec{g} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r_1} \\ \frac{\partial x}{\partial r_2} \end{pmatrix}$$



$$|\vec{g}| = \sqrt{2{,}5^2 + 7{,}5^2} \approx 7{,}9$$

Alle denkbaren Tangenten in einem Punkt auf der Funktionsfläche können unterschiedliche Steigungen haben, sie liegen aber alle in einer Ebene, der Tangentialebene.
Das **totale Differential** beschriebt diese Tangentialebene.

$$dx = \frac{\partial x}{\partial r_1} d r_1 + \frac{\partial x}{\partial r_2} d r_2$$

Funktionswert bei (10,10)

Totales Differential im Punkt (10, 10, 100):

$$dx = 2{,}5 d r_1 + 7{,}5 d r_2$$

Die Funktionsfläche wird durch die Tangentialebene linearisiert.

3) gleichzeitige Erhöhung von r_1 und r_2 um jeweils 0,1:
näherungsweise gilt [in (10, 10, 100)]:

$$\Delta x = 2{,}5 \Delta r_1 + 7{,}5 \Delta r_2 = 2{,}5 \cdot 0{,}1 + 7{,}5 \cdot 0{,}1 = \underline{1}$$

$$\Rightarrow x(10{,}1, 10{,}1) = \underline{\underline{101}}$$

Die Näherung ist in diesem Fall sogar exakt.

4) partielle Ableitungen 2. Ordnung (Krümmung)

$$\frac{\partial}{\partial r_1} \cdot \frac{\partial x}{\partial r_1} = \frac{\partial^2 x}{\partial r_1^2} = \frac{\partial}{\partial r_1} \cdot \frac{10}{4} r_1^{-3/4} \cdot r_2^{3/4} = -\frac{30}{16} r_1^{-7/4} \cdot r_2^{3/4} = -\frac{15}{8} r_1^{-7/4} \cdot r_2^{3/4}$$

$$\frac{\partial}{\partial r_2} \cdot \frac{\partial x}{\partial r_2} = \frac{\partial^2 x}{\partial r_2^2} = \frac{\partial}{\partial r_2} \cdot \frac{30}{4} r_1^{1/4} \cdot r_2^{-1/4} = -\frac{30}{16} r_1^{1/4} \cdot r_2^{-5/4} = -\frac{15}{8} r_1^{1/4} \cdot r_2^{-5/4}$$

5) Lagrange-Verfahren
Nebenbedingung: $x(r_1, r_2) = 10 \cdot r_1^{1/4} r_2^{3/4} = 200 \quad \Rightarrow \quad 10 r_1^{1/4} r_2^{3/4} - 200 = 0$
Zielfunktion: $16 r_1 + 3 r_2 \rightarrow$ min.

Lagrangeverfahren:
Die Extrema der Funktion f(x,y) [Zielfunktion] unter Einhaltung der Nebenbedingung n(x,y) = 0 liegen an den Stellen, an denen die Lagrangefunktion $L(x, y, \lambda) = f(x, y) \pm \lambda \cdot n(x, y)$ ihre Extrema annimmt.

4 Schritte:

1. Aufstellen der Lagrangefunktion
   - Zielfunktion bestimmen
   - Nebenbedingung in expliziter Form
   - Lagrangefunktion bilden
2. Bilden und Nullsetzen der partiellen Ableitungen 1. Ordnung
   $\frac{\partial L}{\partial x} \overset{!}{=} 0 \quad \frac{\partial L}{\partial y} \overset{!}{=} 0 \quad \frac{\partial L}{\partial \lambda} \overset{!}{=} 0$
3. Lösen des Gleichungssytems → x, y, λ
4. Überprüfen von Umgebungspunkten unter Einhaltung der Nebenbedingungen
   → Art des Extremums feststellen

Lösung der Roter Faden Aufgaben:

Zu 1.) $L(r_1, r_2, \lambda) = 16 r_1 + 3 r_2 \pm \lambda (10 r_1^{1/4} r_2^{3/4} - 200)$

vorgezogen:
Aufgabe 6:

$L(r_1, r_2, \lambda) = 10 r_1^{1/4} r_2^{3/4} \pm \lambda (16 r_1 + r_2 - K)$ K: gegebene Kosten

Zu 2.) $\frac{\partial L}{\partial \lambda}=16+10\lambda r_1^{-3/4} r_2^{3/4}\cdot\frac{1}{4}=16+2{,}5\lambda r_1^{-3/4} r_2^{3/4}\overset{!}{=}0 \quad (\mathrm{I})$

$\frac{\partial L}{\partial \lambda}=3+7{,}5 r_1^{1/4} r_2^{-1/4}\lambda\overset{!}{=}0 \quad (\mathrm{II})$

$\frac{\partial L}{\partial \lambda}=10 r_1^{1/4} r_2^{3/4}-200\overset{!}{=}0 \quad (\mathrm{III})$

Zu 3.)

$r_1^{1/4}=20 r_2^{-3/4}$

$r_2^{3/4}=20 r_1^{-1/4}$

(III) in (I):

$16+2{,}5\lambda r_1^{-3/4} 20 r_1^{-1/4}\overset{!}{=}0$

$\Rightarrow 16+50\lambda r_1^{-1}=0$

$\Rightarrow 16=-\frac{50\lambda}{r_1}$

$\Rightarrow \quad \lambda=-\frac{16 r_1}{50}$

(III) in (II):

$3+7{,}5\lambda\cdot 20 r_2^{-3/4} r_2^{-1/4}\overset{!}{=}0$

$\Rightarrow 3+150\lambda r_2^{-1}=0$

$\Rightarrow 3=-\frac{150\lambda}{r_2}$

$\Rightarrow \quad \lambda=-\frac{3 r_2}{150}$

$\Rightarrow \quad \lambda=-\frac{3 r_2}{150}=-\frac{16 r_1}{50}$

$\Rightarrow \quad 150 r_2=2400 r_1$

$\Rightarrow \quad r_2=16 r_1 \qquad (\mathrm{IV})$

(IV) in (III): $10 r_1^{1/4} 16 r_1^{3/4}=200$

$\Rightarrow 16^{3/4} r_1=20$

$\Rightarrow r_1=\frac{20}{8}=\underline{\underline{2{,}5}}$

$\Rightarrow r_2=16\cdot\frac{20}{8}=\underline{\underline{40}}$

Überprüfung:

Output x:

$x=10\cdot 2{,}5^{1/4}\cdot 40^{3/4}=200$ ➔ gegeben laut Aufgabe

Kosten K:

$K=16\cdot 2{,}5+3\cdot 40=\underline{\underline{160}}$ ➔ minimale Kosten

Zu 4.) siehe nächste Stunde. (wima06.pdf)