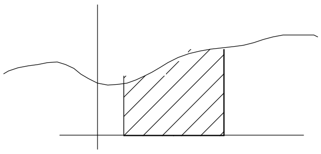
Dichtefunktionen



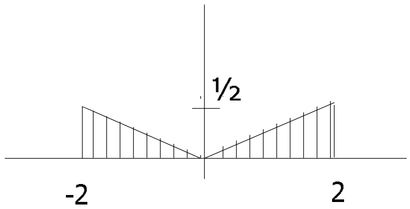
Dichtefunktion: 2 Bedingungen

1) $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

2) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$

Aufgaben:
1) Sind die folgenden Funktionen Dichtefunktionen?
2) Wenn ja, berechnen Sie die Verteilungsfunktion, E(x), Var(x) und den Median.

a)
$$f(x)\begin{cases} -\frac{1}{4}x & -2 \leq x \leq \\ \frac{1}{4}x & 0 < x \leq 2 \\ 0 & sonst \end{cases}$$



1) i) $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$
Begründung: siehe Grafik

ii)
$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int\limits_{-\infty}^{-2} f(x)\,dx + \int\limits_{-2}^{0} f(x)\,dx + \int\limits_{0}^{2} f(x)\,dx + \int\limits_{2}^{+\infty} f(x)\,dx$$
$$= 0 + \int\limits_{-2}^{0} -\frac{1}{4}x\,dx + \int\limits_{0}^{2} \frac{1}{4}x\,dx + 0$$
$$= \left[-\frac{1}{8}x^2\right]_{-2}^{0} + \left[\frac{1}{8}x^2\right]_{0}^{2}$$
$$= \left[0 - (-\frac{1}{8} \cdot 4) + 1\right] + \left[\frac{1}{8} \cdot 4 - 0\right]$$
$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \quad = \underline{\underline{1}}$$

f(x) ist also eine Dichtefunktion.

2) Verteilungsfunktion: kumulierte Wahrscheinlichkeitsverteilung

$$F(x) = \int\limits_{-\infty}^{-2} 0\,dx = [0]_{-\infty}^{-2} = 0 \qquad \text{für } x < -2$$

$$F(x) = 0 + \int\limits_{-2}^{x} f(t)\,dt = \int\limits_{-2}^{x} -\frac{1}{4}t\,dt = \left[-\frac{1}{8}t^2\right]_{-2}^{x} = \frac{-1}{8}x^2 - (-\frac{1}{8} \cdot 4)$$
$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{8}x^2 \qquad \text{für } -2 \leq x < 0$$

$$F(x) = 0 + \int_{-2}^{0} f(t)\,dt + \int_{0}^{x} f(t)\,dt$$
$$= 0 + \frac{1}{2} + \left[\frac{1}{8}t^2\right]_0^x = \frac{1}{2} + \left[\frac{1}{8}x^2 - 0\right] = \frac{1}{2} + \frac{1}{8}x^2 \qquad \text{für } 0 \le x \le 2$$
$$F(x) = 1 \qquad \text{für } x > 2$$

Zusammengefasst ergibt sich:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x > -2 \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{8}x^2 & -2 \le x < 0 \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{8}x^2 & 0 \le x \le 2 \\ 1 & x > 2 \end{cases}$$

Erwartungswert:

$$E(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x)\,dx = 0$$

analog bei diskreten Verteilungen: $E(x) = \sum x \cdot p(x)$

Varianz:

$$Var(x) = E(x^2) - [E(x)]^2 = E[x^2] = 2$$
$$E[x^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\,dx = 0 + \int_{-2}^{0} x^2 \cdot -\frac{1}{4}x\,dx + \int_{0}^{2} x^2 \cdot \frac{1}{4}x\,dx + 0$$
$$= \left[-\frac{1}{16}x^4\right]_{-2}^{0} + \left[\frac{1}{16}x^4\right]_0^2 = 1 + 1 = 2$$

Median:

$$F(\tilde{x}) = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \tilde{x} = 0$$

b)

$$f(x) \begin{cases} -x & -1 \le x \le 0 \\ \frac{1}{4}x & 0 < x \le 2 \\ 0 & sonst \end{cases}$$

i) $f(x) \ge 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

ii)
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 0 + \int_{-2}^{0} -x\,dx + \int_{0}^{2} \frac{1}{4}x\,dx + 0$$
$$= \left[0 + -\frac{1}{2}x^2\right]_{-1}^{0} + \left[\frac{1}{8}x^2\right]_0^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

$\Rightarrow$ $f(x)$ ist eine Dichtefunktion

Verteilungsfunktion:

$F(x) = 0 \qquad \text{für } x < -1$

$F(x) = 0 + \int_{-1}^{x} -t\,dt = \left[-\frac{1}{2}t^2\right]_{-1}^{x} = -\frac{1}{2}x^2 - (-\frac{1}{2}\cdot 1) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}x^2 \qquad \text{für } -1 \le x \le 0$

$F(x) = 0 + \int_{-1}^{0} -t\,dt + \int_{0}^{x} \frac{1}{4}t\,dt = \frac{1}{2} + \left[\frac{1}{8}t^2\right]_{0}^{x} = \frac{1}{2} + \frac{1}{8}x^2 \qquad \text{für } 0 < x \le 2$

$F(x) = 1 \qquad \text{für } x > 2$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x > -1 \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2}x^2 & -2 \le x \le 0 \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{8}x^2 & 0 < x \le 2 \\ 1 & x > 2 \end{cases}$$

Erwartungswert:

$$E(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x)\,dx = \int_{-1}^{0} -x^2\,dx + \int_{0}^{2} \frac{1}{4}x^2\,dx$$
$$= \left[-\frac{1}{3}x^3\right]_{-1}^{0} + \left[\frac{1}{12}x^3\right]_{0}^{2} = \left[0 - (-\frac{1}{3}\cdot -1)\right] + \left[\frac{1}{12}\cdot 8 - 0\right]$$
$$= -\frac{1}{3} + \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

Varianz:

$$Var(x) = E(x^2) - [E(x)]^2 = E(x^2) - \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{5}{4} - \frac{1}{9} = \frac{41}{36}$$
$$E(x^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\,dx = \int_{-1}^{0} -x^3\,dx + \int_{0}^{2} \frac{1}{4}x^3\,dx$$
$$= \left[-\frac{1}{4}x^4\right]_{-1}^{0} + \left[\frac{1}{16}x^4\right]_{0}^{2} = \frac{1}{4} + 1 = \frac{5}{4}$$

Median:

$$F(\tilde{x}) = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad F(0) = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \tilde{x} = 0$$

c)

$$f(x) \begin{cases} x & -1 \le x \le 0 \\ \frac{1}{4}x^2 & 0 < x \le 2 \\ 0 & sonst \end{cases}$$

i) $f(x) < 0 \quad \text{für } -1 \le x \le 0$

→ Keine Dichtefunktion.

d)

$$f(x)\begin{cases} -x & -2\le x\le 0 \\ \frac{1}{4}x & 0< x\le 2 \\ 0 & sonst \end{cases}$$

i) $f(x)\geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

ii) $$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 0 + \int_{-2}^{0} -x\,dx + \int_{0}^{2} \frac{1}{4}x\,dx + 0$$

$$= \left[-\frac{1}{2}x^2\right]_{-2}^{0} + \left[\frac{1}{8}x^2\right]_{0}^{2} = 0 + \frac{1}{2}\cdot 4 + \frac{1}{2} - 0$$

$$= 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2} > 1$$

→ Keine Dichtefunktion.

e)

$$f(x)\begin{cases} 0 & \text{für } x\le 0 \\ \frac{1}{\beta^2}x\,\mathrm{e}^{\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\beta}\right)^2\right]} & \text{für } x>0\ mit\ \beta\neq 0 \end{cases}$$

→ Rayleigh-Distribution!

i) $f(x)\geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

ii) $$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{0}^{+\infty} \frac{1}{\beta^2}x\,\mathrm{e}^{\left[-\frac{1}{2}\frac{x^2}{\beta^2}\right]}dx$$

$$\Rightarrow \int_{0}^{\infty} -g'(x)\cdot \mathrm{e}^{g(x)}dx$$

$$= \left[-\mathrm{e}^{\left[-\frac{1}{2}\frac{x^2}{\beta^2}\right]}\right]_{0}^{\infty}$$

$$= 0 - (-\mathrm{e}^0) = 0 + 1 = \underline{\underline{1}}$$

→ Es ist eine Dichtefunktion