Aufgabe B4:

Grundgesamtheit: {20,22,24}

1.) $\mu=\frac{1}{N}\cdot\sum_{i=1}^{3}x_i=\frac{1}{3}\cdot(20+22+24)=\underline{\underline{22}}$

$\sigma^2=\frac{1}{N}\cdot\sum_{i=1}^{3}(x_i-\mu)^2=\frac{1}{N}\cdot[(20-22)^2+(22-22)^2+(24-22)^2]=\frac{1}{3}\cdot(4+4)=\frac{8}{3}$

2.) $3\cdot3=3^2=\underline{\underline{9}}$

3.)

x_1	x_2	y	$\bar{x}$	$(x_1-\bar{x})^2$	$(x_2-\bar{x})^2$	z^2	s^2
20	20	40	20	0	0	0	0
20	22	42	21	1	1	1	2
20	24	44	22	4	4	4	8
22	20	42	21	1	1	1	2
22	22	44	22	0	0	0	0
22	24	46	23	1	1	1	2
24	20	44	22	4	4	4	8
24	22	46	23	1	1	1	2
24	24	48	24	0	0	0	0

Was ist eine Wahrscheinlichkeitsverteilung?

Eine Wahrscheinlichkeitsverteilung ordnet jeder Ausprägungsmöglichkeit ihre Wahrscheinlichkeit zu.

4.) a) $Y=\sum_{i=1}^{2}x_i$

Y = y_i	*40*	*42*	*44*	*46*	*48*
P(Y = y_i)	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{3}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$

$E(Y)\ =\ \sum_{i=1}^{1}y_i\cdot P(Y=y_i)\ =\ 40\cdot\frac{1}{9}+42\cdot\frac{2}{9}+44\cdot\frac{3}{9}+46\cdot\frac{2}{9}+48\cdot\frac{1}{9}\ =\ \underline{\underline{44}}$

$\mathrm{Var}(Y)=\sum_{i=1}^{5}[y_i-E(y_i)]^2\cdot P(Y=y_i)=16\cdot\frac{1}{9}+4\cdot\frac{2}{9}+0\cdot\frac{3}{9}+4\cdot\frac{2}{9}+16\cdot\frac{1}{9}=\underline{\underline{\frac{16}{3}}}$

b) $\bar{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{2}X_i$

$\bar{X}=\bar{x}$	*20*	*21*	*22*	*23*	*24*
P($\bar{X}=\bar{x}$)	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{3}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$

$E(\bar{X})=\underline{\underline{22}}$

$\mathrm{Var}(\bar{X})=\sum_{i=1}^{n}\left(\bar{x}_i-E(\bar{X})\right)^2\cdot P(\bar{X}=\bar{x}_i)=\underline{\underline{\frac{4}{3}}}$

c) $Z^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{2}(X_i - \bar{X}$

$Z^2 = z^2$	*0*	*1*	*4*
$P(Z^2 = z^2)$	$\frac{3}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{2}{9}$

$$E(Z^2) = \sum_{i=0}^{3} z_i^2 \cdot P(Z_i^2 = z_i^2) = 0\cdot\frac{3}{9} + 1\cdot\frac{4}{9} + 4\cdot\frac{2}{9} = \frac{12}{9} = \underline{\underline{\frac{4}{3}}}$$

d) $S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{2}(X_i - \bar{X})^2$

$S^2 = s^2$	*0*	*2*	*8*
$P(S^2 = s^2)$	$\frac{3}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{2}{9}$

$$E(S^2) = \sum_{i=0}^{3} s^2 \cdot P(S^2 = s^2) = 0\cdot\frac{3}{9} + 2\cdot\frac{4}{9} + 8\cdot\frac{2}{9} = \frac{24}{9} = \underline{\underline{\frac{8}{3}}}$$

5.) a) $E(Y) = 44 = 2\cdot 22 = n\cdot\mu$

$Var(Y) = \frac{16}{3} = 2\cdot\frac{8}{3} = n\cdot\sigma$

b) $E(\bar{X}) = 22 = \mu$

$Var(\bar{X}) = \frac{4}{3} = \frac{\frac{4}{3}}{2} = \frac{\sigma}{n}$

c) $E(Z^2) = \frac{4}{3} = \frac{2-1}{2}\cdot\frac{8}{3} = \frac{n-1}{n}$

d) $E(S^2) = \frac{8}{3} = \sigma$

Aufgabe B5:

$X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$

$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum X_i$

$$E(\bar{X}) = E\left(\frac{1}{n}\sum x_i\right) = \frac{1}{n}\cdot\sum E(x_i) = \frac{1}{n}\cdot(n\cdot\mu) = \mu$$

$$Var(\bar{X}) = Var\left(\frac{1}{n}\sum x_i\right) = \frac{1}{n^2}\cdot Var\left(\sum x_i\right) = \frac{1}{n^2}\cdot\sum Var\, x_i = \frac{1}{n^2}\cdot n\cdot\sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n}$$

$$\bar{X} = N\left(\mu_{\bar{x}} = \mu, \sigma_{\bar{x}}^2 = \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

1.) $P(\bar{X} > \mu_{\bar{x}} + 0{,}5) = 1 - P(\bar{X} \le \mu_{\bar{x}} + 0{,}5)$

$$= 1 - P\left(Z \le \frac{\mu_{\bar{x}} + 0{,}5 -}{\sigma_{\bar{x}}}\right.$$

$$= 1 - P\left(Z \le \frac{0{,}5}{\sigma}\cdot\sqrt{n}\right)$$

a) $\sigma=1, n=16$

$1-P(Z \leq 0{,}5 \cdot 4)=1-P(Z \leq 2)=1-\Phi(2)=1-0{,}9722=\underline{\underline{0{,}0228}}$

b) $\sigma=1, n=64$

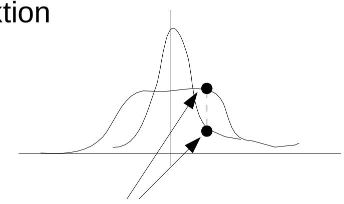
$1-P(Z \leq 0{,}5 \cdot 8)=1-P(Z \leq 4)=1-\Phi(4)=1-1=\underline{\underline{0}}$

c) $\sigma=2, n=64$

$1-P\left(Z \leq \frac{0{,}5 \cdot 8}{2}\right)=1-P(Z \leq 2)=1-\Phi(2)=1-0{,}9722=\underline{\underline{0{,}0228}}$

2.) $P\left(Z \leq \frac{0{,}5}{\sigma} \cdot \sqrt{n}\right)$ σ ist unbekannt, also ist der gesamte Term unbekannt.

σ ist die Streuung der Wahrscheinlichkeitsfunktion



(Wir wissen nicht welche Streuung die Funktion hat.)

3.) S^2 ist die Stichprobenvarianz.

$$X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$$

$$Y_i = \frac{x_i - \mu}{\sigma} \quad ; \quad Y_i \sim N(0,1)$$

$$Z^2 = \frac{1}{n} \sum (X_i - \mu)^2$$

$$\Rightarrow n \cdot Z^2 = \sum (X_i - \mu)^2$$

$$\Rightarrow \frac{n \cdot z^2}{\sigma^2} = \sum \left(\frac{x_i - \mu}{\sigma}\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} (Y_i)^2$$

$$\rightarrow \quad \frac{n \cdot Z^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n)$$

$$P(Z^2 > 2\sigma^2) = P\left(\frac{n \cdot z^2}{\sigma^2} > 2n\right) = 1 - P\left(\frac{n \cdot z^2}{\sigma^2} \leq 2n\right)$$

μ bekannt: $\frac{n \cdot Z^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n)$, μ unbekannt: $\frac{(n-1) \cdot S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$ [ein Freiheitsgrad weniger]

a) n = 7, μ bekannt.

$$1-P\left(\frac{n \cdot z^2}{\sigma^2} \leq 14\right) \approx 1-0{,}95=\underline{\underline{0{,}05}}$$

b) n = 16, μ bekannt.

$$1-P\left(\frac{n \cdot z^2}{\sigma^2} \leq 32\right) \approx 1-0{,}99=\underline{\underline{0{,}01}}$$

c) n = 16, μ unbekannt.

$$\rightarrow S^2 = \frac{1}{n-1}\sum (X_i - \bar{X})^2$$

$$\rightarrow \frac{(n-1)\cdot S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$$

$$P(S^2 > 2\sigma^2) = 1 - P\left(\frac{(n-1)\cdot S^2}{\sigma^2} \leq (n-1)\cdot 2\right)$$

$$= 1 - P\left(\frac{(n-1)\cdot s^2}{\sigma^2} \leq 30\right)$$

$$= 1 - 0{,}99 = \underline{\underline{0{,}01}}$$

Aufgabe B7:

μ = wahre Rückflüsse

X_i = Schätzung des i-ten Ressortchefs

x_i = $\sum_{i=1}^{3} z_{i,j}$ mit $z_{i,j}$ = Schätzung des i-ten Chefs für Monat j.

$$\rightarrow X_i \underset{\text{approx.}}{\sim} N(\mu, \sigma^2)$$

2. a) $E(\hat{\mu}_1) 0 E(X_n) = \underline{\underline{\mu}}$

b) $E(\hat{y}_2) = E\left(\frac{1}{7}\cdot\sum_{i=1}^{n}(X_i)\right) \Rightarrow \frac{1}{7}\cdot\sum_{i=1}^{7} E(X_i) = \frac{1}{7}\cdot 7\mu = \underline{\underline{\mu}}$

c) $E(\hat{\mu}_3) = E\left(\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{6}\cdot\sum_{i=1}^{6} X_i + \frac{4}{5}\cdot X_7\right)$

$$= \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{6}\cdot\sum_{i=1}^{6} E(X_i) + \frac{4}{5} E(X_7)$$

$$= \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{6}\cdot(6\mu) + (\frac{4}{5}\mu)$$

$$= \frac{1}{5}\cdot\mu + \frac{4}{5}\cdot\mu = \mu$$