Aufgabe B16:

1) X: „# der Bakterien pro cm.“

$$X \sim P(\lambda) \rightarrow P(X=x) = \begin{cases} \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} & x \geq 0 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

$$\Theta = \lambda = E(X)$$

2) $$L(\Theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x) = \prod_{i=1}^{n} P(X=x) = \prod_{i=1}^{n} \frac{\lambda^{x_i}}{x_i!} e^{-\lambda}$$

$$\Rightarrow L(\Theta, 0,1,1,2,3,5) = \frac{\lambda^0}{0!} e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^1}{1!} e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^1}{1!} e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^2}{2!} e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^3}{3!} e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^5}{5!} e^{-\lambda}$$

$$\Rightarrow L(\Theta) = \frac{\lambda^{12}}{2!3!5!} e^{-6\lambda}$$

$$\rightarrow \ln L(\Theta) = 12 \ln \lambda - \ln(2!3!5!) - 6\lambda$$

$$\rightarrow \frac{\partial \ln(L(\Theta))}{\partial \Theta} = \frac{12}{\lambda} - 6 = 0$$

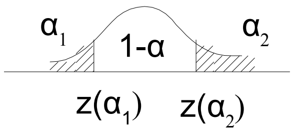
$$\rightarrow \frac{12}{\lambda} = 6 \rightarrow \underline{\underline{\hat{\lambda} = 2 = \theta}}$$

Punktschätzung: präzise, aber nicht zuverlässig
Intervallschätzung: nicht präzise, aber zuverlässig

Intervallschätzung: α-Irrtumswahrscheinlichkeit

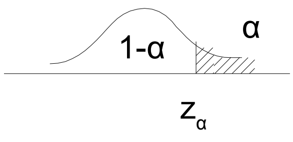
<u>2-seitiges Intervall:</u>

$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$

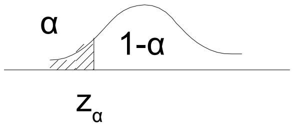


Bei Symmetrie: $\alpha = \alpha/2 + \alpha/2$

<u>1-seitige Intervalle:</u>



$P(X \leq z_\alpha) = 1-\alpha$



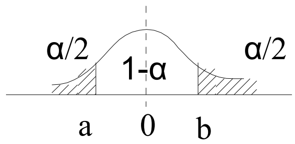
$P(X \geq z_\alpha) = 1-\alpha$

<u>Konfidenzintervall für μ bei bekanntem σ²:</u>

Sei X_i i.i.d. mit $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$

$\bar{X}$ ist erwartungstreuer Schätzer für μ.

$$\bar{X} \sim N\left(ma, \frac{\sigma^2}{n}\right) \Rightarrow \frac{\bar{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim N(0,1)$$



z(α/2) = - z(1-α/2)

z(1- α/2)

$$P\left(a \le \frac{\bar{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \le b\right) = 1-\alpha$$

$$\Rightarrow P\left(-z_{1-\frac{\alpha}{2}} \le \frac{\bar{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \le z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) = 1-\alpha$$

$$\Rightarrow P\left(-z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \le \bar{X} - \mu \le z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 1-\alpha$$

$$\Rightarrow P\left(-\bar{X} - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \le -\mu \le -\bar{X} + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 1-\alpha$$

$$\Rightarrow P\left(\bar{X} - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \le \mu \le \bar{X} + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 1-\alpha$$

$$\rightarrow KI = \left[\bar{X} - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} ; \bar{X} + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$$

Bei $\alpha = 0{,}05 \;\rightarrow\; 1-\alpha = 0{,}95$

$$\rightarrow 1 - \frac{\alpha}{2} = 0{,}975 \;\rightarrow\; z_{1-\frac{\alpha}{2}} \approx \underline{\underline{1{,}96}}$$

$$\rightarrow KI = \left[\bar{X} - 1{,}96\frac{\sigma}{\sqrt{n}} ; \bar{X} + 1{,}96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$$

In 1 – α % der Fälle liegt unser μ in diesem Konfidenzintervall.

Intervallbreite $= d - c$

$$= \bar{X} + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} - \left(\bar{X} - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

$$\Rightarrow IB = 2 \cdot z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

n↑ => IB ↓ n↓ => IB ↑

α↑ => IB ↓ α↓ => IB ↑ α ist die Irrtumswahrscheinlichkeit.

α ↑ bedeutet, dass IB kleiner ist, wir eine geringere Chance haben, richtig zu liegen.

<u>Aufgabe C1:</u>
Aufgabenteil A:

X_i = „Fahrleistung eines PKW“
x ist beliebig verteilt.

$E(X_i)=50 \qquad E(\bar{X})=50$

$Var(X_i)=7^2 \qquad Var(\bar{X})=\frac{\sigma^2}{n}=\frac{49}{49}=1$

$$\bar{X}=\frac{1}{n}\cdot\sum x_i$$

$$\bar{X} \overset{\text{approx.}}{\sim} N\left(\mu,\frac{\sigma^2}{n}\right)$$

1) $P\left(-z_{1-\frac{\alpha}{2}}\le\frac{\bar{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\le z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right)=1-\alpha$

$\Rightarrow P\left(-z_{1-\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\le\bar{X}-\mu\le z_{1-\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)=1-\alpha$

$\Rightarrow P\left(\bar{X}-z_{1-\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\le\mu\le\bar{X}+z_{1-\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)=1-\alpha$

KI für $\mu=\left[\bar{X}-z_{1-\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}};\bar{X}+z_{1-\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$

2) $1-\alpha=0,95$

$\Rightarrow\alpha=0,005 \quad\rightarrow\quad z_{1-\frac{\alpha}{2}}\approx1,96$

KI = $[50-1,96\cdot1;50+1,96\cdot1]=\boxed{\underline{\underline{48,04;51,96}}}$

3) Breite = $2\cdot z_{1-\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\overset{!}{=}2$

$\Rightarrow z_{1-\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=1$

$\Rightarrow1,96\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=1 \quad\rightarrow\quad \sqrt{n}=7\cdot1,96$

$\Rightarrow n=(7\cdot1,96)^2=188,74$

$\Rightarrow\underline{\underline{n=189}}$

Aufgabenteil B:

Y: „# der ADAC-Mitglieder unter 200 Personen“

$Y \sim B(n, \pi)$

Zentraler Grenzwertsatz: $Y \overset{\text{approx.}}{\sim} N(n\pi, n\pi(1-\pi))$

$$\rightarrow \frac{Y - n\cdot\pi}{\sqrt{n\pi\cdot(1-\pi)}} \sim N(0,1)$$

$\frac{Y}{n}$ ist ein erwartungstreuer Schätzer für π.

Umformung:
$$\frac{(Y-n\cdot\pi)\cdot\left(\frac{1}{n}\right)}{\sqrt{n\pi\cdot(1-\pi)}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)} = \frac{\frac{Y}{n}-\pi}{\sqrt{\frac{\pi}{n}(1-\pi)}} \sim N(0,1)$$

1)
$$P\left(-z_{1-\frac{\alpha}{2}} \le \frac{\frac{Y}{n}-\pi}{\sqrt{\frac{\pi}{n}(1-\pi)}} \le z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) = 1-\alpha$$

$$\overset{\text{approx.}}{\Rightarrow} P\left(-z_{1-\frac{\alpha}{2}} \le \frac{p-\pi}{\sqrt{\frac{p}{n}(1-p)}} \le z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) = 1-\alpha$$

$$\Rightarrow P\left(-z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{p}{n}(1-p)} \le p-\pi \le z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{p}{n}(1-p)}\right) = 1-\alpha$$

$$\Rightarrow P\left(\left[-z_{1-\frac{\alpha}{2}}\cdot\sqrt{\frac{p}{n}(1-p)}\right]-p \le -\pi \le z_{1-\frac{\alpha}{2}}\cdot\sqrt{\frac{p}{n}(1-p)}-p\right) = 1-\alpha$$

$$\Rightarrow P\left(p - z_{1-\frac{\alpha}{2}}\cdot\sqrt{\frac{p}{n}(1-p)} \le \pi \le p + z_{1-\frac{\alpha}{2}}\cdot\sqrt{\frac{p}{n}(1-p)}\right) = 1-\alpha$$

$$\text{KI für } \pi = \left[\frac{Y}{n} - z_{1-\frac{\alpha}{2}}\cdot\sqrt{\frac{\frac{Y}{n}\cdot\left(1-\left(\frac{Y}{n}\right)\right)}{n}};\ \frac{Y}{n} - z_{1-\frac{\alpha}{2}}\cdot\sqrt{\frac{\frac{Y}{n}\cdot\left(1-\left(\frac{Y}{n}\right)\right)}{n}}\right]$$

2)
$$1-\alpha = 0{,}99 \ \rightarrow\ z_{1-\frac{\alpha}{2}} = 2_{0{,}995} = 2{,}58$$

$$\frac{Y}{n} = \frac{40}{200} = 0{,}2$$

$$\rightarrow \text{KI} = \left[0{,}2 - 2{,}58\cdot\sqrt{\frac{0{,}2\cdot 0{,}8}{200}};\ 0{,}2 + 2{,}58\cdot\sqrt{\frac{0{,}2\cdot 0{,}8}{200}}\right]$$
$$= \underline{\underline{[0{,}13;\ 0{,}27]}}$$

t-Verteilung

Sei $X \sim N(0,1)$ und $Y = \chi^2(n)$

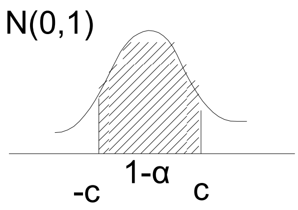
$$\Rightarrow \frac{X}{\sqrt{\frac{Y}{n}}} \sim \text{t-verteilt}(n)$$

$$X = \frac{X-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim N(0,1)$$

$$Y = \frac{s^2(n-1)}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$$

$$\rightarrow \frac{\frac{\bar{x}-\mu}{\sigma/n}}{\sqrt{\frac{\left(\frac{s^2(n-1)}{\sigma^2}\right)}{n-1}}} \sim t(n-1)$$

$$\Rightarrow \frac{\frac{\bar{x}-\mu}{(\sigma/\sqrt{n})}}{\frac{s}{\sigma}} = \frac{\bar{x}-\mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}} \cdot \frac{\sigma}{s} = \underline{\underline{\frac{\bar{x}-\mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}} \sim t(n-1)}}$$



$\rightarrow$