Aufgabe D7:

1. X_i : „Durchmesser der i-ten Welle“

$X_i \sim N(\mu = 200, \sigma^2 = 5^2)$

2. Schritt: $H_0: \quad \mu = \mu_0 = 200$

$H_1: \quad \mu \neq \mu_0 = 200$

3. Schritt: $\alpha = 5\% \quad \rightarrow 1 - \frac{\alpha}{2} = 97{,}5\% \rightarrow \; z_{0{,}975} = 1{,}96$

4. Schritt: $\bar{X} \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{10})$

5. Schritt: Unter H_0 :

$$\frac{\bar{x} - \mu_o}{\sigma / \sqrt{n}} \sim N(0{,}1)$$

$$P(-z_{1-\frac{\alpha}{2}} \leq \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} \leq z_{1-\frac{\alpha}{2}}) = 1 - \alpha$$

$$\Rightarrow P(\mu_0 - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \bar{x} \leq \mu_0 + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$$

Annahmebereich: $\{\bar{x} | \mu_0 - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \bar{x} \leq \mu_0 + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\}$

Ablehnbereich: $\rightarrow B = \{\bar{x} | \bar{x} < \mu_0 - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \cup \bar{x} > \mu_0 + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\}$

$$= \{\bar{x} | \bar{x} < 200 - 1 - 96 \cdot \frac{5}{10} \cup \bar{x} > 200 + 1{,}96 \cdot \frac{5}{10}\}$$

$$= \{\bar{x} | \bar{x} < 199{,}02 \cup \bar{x} > 200{,}98\}$$

2. $\bar{x}_{K_1} = 200{,}4 \quad \Rightarrow \text{Annahmebereich}$

Entscheidung für H_0 : „H_0“

3. P(„H_0“| H_1) => β-Fehler

4. $\bar{x}_{K_1} = 202 \quad \Rightarrow \text{Ablehnbereich}$

Entscheidung für H_1: „H_1“

5. P(„H_1“| H_0) => α-Fehler.

Die Gütefunktion:

$g(\theta) = P(\text{"H}_0 \text{ abzulehnen"})$

Es gibt 2 Möglichkeiten H_0 abzulehnen:

	H_0	H_1
„H_0“		
„H_1“	x	x

i) $\theta \in \text{Annahmebereich}$

→ Entscheidung für „H_1“ => P(„H_1“| H_0) = α-Fehler

=> $g(\theta)$ gibt die Wahrscheinlichkeit für α-Fehler an.

ii) $\theta \in \text{Ablehnbereich}$

→ Entscheidung für „H_0“ => P(„H_0“| H_1) = β-Fehler

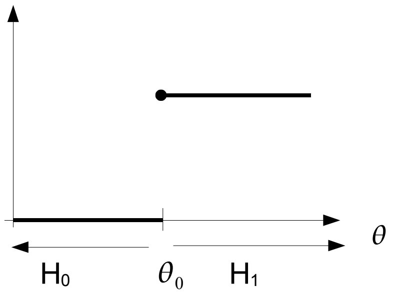
$\beta\text{-Fehler} = P(\text{"H}_0\text{"} | H_1) = 1 - P(\text{"H}_1\text{"} | H_1) = 1 - g(\theta)$

$\Rightarrow g(\theta) = 1 - P(\beta\text{-Fehler})$

$g(\theta)=1-P(\beta)$ $\quad$ $g(\theta)=P(\alpha)$

$\longleftarrow$ H_1 $\quad$ H_0 $\longrightarrow$

ideal: $g(\theta)$



Bsp.: Sei $\quad H_0$: $\mu\leq\mu_0$ $\qquad$ einseitiger Test.

$\qquad H_1$: $\mu>\mu_0$

$$X_i\sim N(\mu,\sigma^2)$$

$$\bar{X}\overset{H_0}{\sim}N(\mu,\frac{\sigma^2}{n})$$

$$g(\mu)=P(H_0\,\text{abzulehnen})$$

$$\mu\in H_0\rightarrow g(\mu)\leq\alpha$$

$$\mu\in H_1\rightarrow 1-g(\mu)=P(\beta\text{-Fehler})$$

$$\frac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$$

$$P(\frac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\leq z_{1-\alpha})=1-\alpha \quad\rightarrow B=\{\frac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}>z_{1-\alpha}\}$$

$\mu\in H_0$:

$$P(H_0\,\text{abzulehnen})=P(\frac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}>z_{1-\alpha}|\mu)$$

$$g(\theta)=\alpha$$

$\mu\in H_1$:

$$\rightarrow\mu\neq\mu_0$$

$$\rightarrow g(\theta)=P(\frac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}>z_{1-\alpha}|\mu)$$

$$g(\mu)\quad=P(\frac{\bar{x}-\mu_0+\mu-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}>z_{1-\alpha})$$

$$=P(\frac{\bar{x}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}+\frac{\mu-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}>z_{1-\alpha})$$

$$=P(\quad Z\quad+\frac{\mu-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}>z_{1-\alpha})$$

$$=P(Z>z_{1-\alpha}-\frac{\mu-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}})\quad=1-P(Z\leq z_{1-\alpha}-\frac{\mu-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}})$$

$$g(\mu)\quad=1-\Phi(z_{1-\alpha}-\frac{\mu-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}})$$