Wirtschaftsmathematische Zusätze für Wirtschaftsingenieure

Markov-Ketten

Roter Faden – Aufgaben:

$t=0 \qquad\qquad t=1 \qquad\qquad t=2$

$M_1(t=0)=0{,}4 \rightarrow M_1(1)=0{,}4\cdot 0{,}9+0{,}6\cdot 0{,}2=0{,}48 \qquad M_1(2)=0{,}48\cdot 0{,}9+0{,}52\cdot 0{,}2=\underline{\underline{0{,}53}}$

$M_2(t=0)=0{,}6 \rightarrow M_2(1)=0{,}6\cdot 0{,}8+0{,}4\cdot 0{,}1=0{,}52 \qquad M_2(2)=0{,}52\cdot 0{,}8+0{,}48\cdot 0{,}1=\underline{\underline{0{,}464}}$

1) Ansatz über Differenzengleichung:

$$\begin{aligned} M_1(t+1)&=[M_1\cdot 0{,}9+M_2\cdot 0{,}2] \\ &=M_1(t)\cdot 0{,}9+(1-M_1(t))\cdot 0{,}2 \\ &=0{,}9M_1(t)+0{,}2-0{,}2M_1(t) \\ &=0{,}7\cdot M_1(t)+0{,}2 \\ y_{t+1}\ &=a\ \cdot y_t\ \ +\ b \end{aligned}$$

$$M_1+M_2=1 \qquad \Leftrightarrow M_2=1-M_1(t)$$

Lösung der DGL:

$$y_t=\left(y_0-\frac{b}{1-a}\right)\cdot a^t+\frac{b}{1-a} \qquad \mid \text{einsetzen}$$

$$=\left(0{,}4-\frac{0{,}2}{0{,}3}\right)\cdot 0{,}7^t+\frac{0{,}2}{0{,}3} \qquad \mid \text{ausrechnen}$$

$$=-\frac{4}{15}\cdot 0{,}7^t+\frac{2}{3} \qquad [\text{zur Berechnung der Anteile der Sorte M1 zum Zeitpunkt t.}]$$

Die Anteile für M_2 ergeben sich leicht aus: $M_2(t) = 1 – M_1(t)$

2) Matrizenrechnung

Zustandsvektor p_t : $p_t=\begin{pmatrix} M_1(t) \\ M_2(t) \end{pmatrix}$ (Spaltenvektor)

$p_t'=(M_1(t)\ \ M_2(t))$ (Zeilenvektor)

Übergangsmatrix T:

nach / ***von***	***M_1***	***M_2***	
M_1	0,9	0,1	→ ∑ = 1
M_2	0,2	0,8	→ ∑ = 1
$p_0'=(0{,}4\ \ 0{,}6)$	$0{,}4\cdot 0{,}9+0{,}6\cdot 0{,}2$ $=0{,}48$	$0{,}4\cdot 0{,}1+0{,}6\cdot 0{,}8$ $=0{,}52$	→ ∑ = 1
$p_1'=(0{,}48\ \ 0{,}52)$	$=0{,}536$	$=0{,}464$	→ ∑ = 1

$$p_2=\begin{pmatrix} 0{,}536 \\ 0{,}464 \end{pmatrix}$$

3) Annahmen:

1. fester Käuferkreis
2. konst. Übergangsverhalten (konst. Übergangsmatrix)
3. keine neuen Konkurrenzprodukte
4. Gedächtnislosigkeit (Wahl höngt von der Vorperiode ab, nicht von der restlichen Perioden davor.)

Neuer Konkurrent M_3 :

neue Übergangsmatrix (laut Aufgabenstellung)

$$p_2 = \begin{pmatrix} 0{,}536 \\ 0{,}464 \\ 0 \end{pmatrix}$$ → neuer Konkurrent hat zunächst 0% Marktanteil.

4)

	0,7	**0,1**	**0,2**	
	0,3	**0,6**	**0,1**	
	0,3	**0,1**	**0,6**	
$p_2' = (0{,}536 \;\; 0{,}464 \;\; 0)$	0,5144	0,3320	0,1536	$= p_3'$
$p_3' = (0{,}5144 \;\; 0{,}322 \;\; 0{,}1536)$	0,5058	0,2660	0,2282	$= p_4'$
$p_4' = (0{,}5058 \;\; 0{,}2660 \;\; 0{,}2282)$	0,5023	0,2330	0,2647	$= p_5'$
$p_5' = (0{,}5023 \;\; 0{,}2330 \;\; 0{,}2647)$	0,5009	0,2165	0,2826	$= p_6'$
$p_6' = (0{,}5009 \;\; 0{,}2083 \;\; 0{,}2913)$	0,5004	0,2083	0,2913	$= p_7'$

5 Perioden nach Eintritt des neuen Konkurrenten M_3 herrscht folgende Machtverteilung:

$$p_7 = \begin{pmatrix} 0{,}5004 \\ 0{,}2083 \\ 0{,}2913 \end{pmatrix}$$

Ist ein Trend erkennbar? Ja, es ist ein Trend erkennbar. 50% / 20% / 30%

5) Gleichgewichtsbedingung:

$p'_{GG} \cdot T = p'_{GG} = (m_1 \;\; m_2 \;\; m_3)$ $p'_{GG} \rightarrow$ Zustandsvektor im Gleichgewicht

Auftrennen des Gleichungssystems:

	T
$p'_{GG} = (m_1 \;\; m_2 \;\; m_3)$	$(m_1 \;\; m_2 \;\; m_3)$

$$m_1 = 0{,}7 \cdot m_1 + 0{,}3 \cdot m_2 + 0{,}3 \cdot m_3 \quad (\mathrm{I}) \quad | -m_1$$
$$m_2 = 0{,}1 \cdot m_1 + 0{,}6 \cdot m_2 + 0{,}1 \cdot m_3 \quad (\mathrm{II}) \quad | -m_2$$
$$m_3 = 0{,}2 \cdot m_1 + 0{,}1 \cdot m_2 + 0{,}6 \cdot m_3 \quad (\mathrm{III}) \quad | -m_3$$

$$
\begin{aligned}
0 &= -0{,}3 \cdot m_1 + 0{,}3 \cdot m_2 + 0{,}3 \cdot m_3 \quad (\mathrm{I}) \\
0 &= 0{,}1 \cdot m_1 - 0{,}4 \cdot m_2 + 0{,}1 \cdot m_3 \quad (\mathrm{II}) \\
0 &= 0{,}2 \cdot m_1 + 0{,}1 \cdot m_2 - 0{,}4 \cdot m_3 \quad (\mathrm{III})
\end{aligned}
$$

Hier besteht Abhängigkeit der Zeilen voneinander: $(\mathrm{I}) = -[(\mathrm{II}) + (\mathrm{III})]$

$\Rightarrow$ (I) wird gestrichen und ersetzt durch $1m_1 + 1m_2 + 1m_3 = 1$.

Gleichungssystem in Matrixform:

$$
\begin{pmatrix} 0{,}1 & -0{,}4 & 0{,}1 \\ 0{,}2 & 0{,}1 & -0{,}4 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}
$$

Lösen mit Hilfe des Gauß-Algorithmus.

$$
\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ 0{,}2 \\ 0{,}3 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad p_{GG} = \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ 0{,}2 \\ 0{,}3 \end{pmatrix}
$$

Die Anfangsverteilung ist bedeutungslos.

<u>6) Warteschlange mit Markov:</u>

$$
\begin{aligned}
p^{(1)\prime} &= (p_1 \;\; p_2 \;\; p_3) \\
p^{(o)\prime} &= \;? \\
p^{(o)\prime} \cdot T &= p^{(1)\prime} \qquad \Big| \cdot T^{-1} \;\; [\text{inverse Übergangsmatrix}] \\
p^{(o)\prime} \cdot T \cdot T^{-1} &= p^{(1)\prime} \cdot T^{-1} \\
\Rightarrow \; p^{(o)\prime} &= p^{(1)\prime} \cdot T^{-1}
\end{aligned}
$$