Wirtschaftsmathematische Zusätze für Wirtschaftsingenieure

Nachtrag zur letzten Stunde:

Funktionen mehrer Veränderlicher

Überprüfung:
Output x:
→ $x=10\cdot 2{,}5^{1/4}\cdot 40^{3/4}=200$ gegeben laut Aufgabe
Kosten K:
→ $K=16\cdot 2{,}5+3\cdot 40=\underline{\underline{160}}$ → minimale Kosten

Schritt 4: Lagrange-Verfahren (letzter Schritt des Verfahrens)
Überprüfen der Umgebungspunkte unter Einhaltung der Nebenbedingung.

$r_1 = 3$ => $r_2 = 37{,}64$
NB: $r_1^{1/4}\cdot r_2^{3/4}=20$
$\Rightarrow r_2^{3/4}=20\,r_1^{-1/4}$
$r_2=(20\,r_1^{-1/4})^{4/3}=37{,}64$
$K=16\cdot 3+3\cdot 37{,}64=160{,}92>160$

$r_1 = 2$ => $r_2 = 37{,}64$
$K=16\cdot 2+3\cdot 43{,}09=161{,}27>160$
→ Umgebungspunkte sind höher als gefunder Extremwert.
→ gefundener Wert ist Maximum.

Aufgabe 6) $L(r_1, r_2, \lambda)=10\,r_1^{1/4} r_2^{3/4}\pm\lambda(16\,r_1+3\,r_2-K)$
K sind die gegebenen Kosten und die Gleichung entspricht der allgemeinen Form: $L()=Zielfunktion[min/max]\pm\lambda(NB\overset{!}{=}0)$

Aufgabe 7) Substitutionsverfahren
Zielfunktion: $x(r_1, r_2)=10\,r_1^{1/4} r_2^{3/4} \quad \Rightarrow Max.$
Nebenbedingung: $K=16\,r_1+3\,r_2=160$

$$r_1+\frac{3}{16}r_2=10 \quad \Rightarrow \boxed{r_1=10-\frac{3}{16}r_2}$$
$$x(r_2)=10\left(10-\frac{3}{16}r_2\right)^{1/4}\cdot r_2^{3/4}$$

Gesucht ist jetzt das Maximum einer Funktion mit einer Veränderlichen.
Nachteil hierbei: Ableitung benötigt Produkt- und Kettenregel.

Zusatz: Zielfunktion: Kostenfunktion
Nebenbedingung: Produktionskosten

$$\begin{array}{lll} \text{I} & 10\lambda\cdot r_1^{\alpha-1} r_2^{1-\alpha} & =16 \\ \text{II} & 10\lambda(1-\alpha) r_1^{\alpha} r_2^{-\alpha} & =3 \\ \text{III} & 10\,r_1^{\alpha}\cdot r_2^{1-\alpha} & =200 \end{array}$$

$$\begin{array}{llllll} \text{I'} & r^{\alpha-1} & r_2^{1-\alpha} & \lambda & = \frac{16}{10}\cdot\frac{1}{\alpha} & \\ \text{II'} & r_1^{\alpha} & r^{¿}-\alpha_2 & \lambda & = \frac{3}{10}\cdot\frac{1}{(1-\alpha)} & \text{logarithmieren.} \\ \text{III'} & r_1^{\alpha} & r_2^{1-\alpha} & 0 & = 20 & \end{array}$$

$$(\alpha-1)\ln r_1+(1-\alpha)\ln r_2+\ln\lambda=\ln(\frac{8}{5})-\ln\alpha$$

$$\alpha \quad \ln r_1 - \quad \alpha \quad \ln r_2+\ln\lambda=\ln(\frac{3}{10})-\ln(1-\alpha)$$

$$\alpha \quad \ln r_1+(1-\alpha)\ln r_2+ \;\; 0 \;\; =\ln(20)$$

In Matrixschreibweise ergibt sich hieraus:

$$\begin{pmatrix} \alpha-1 & 1-\alpha & 1 \\ \alpha & -\alpha & 1 \\ \alpha & 1-\alpha & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \ln r_1 \\ \ln r_2 \\ \lambda \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \ln(\frac{8}{5})-\ln(\alpha) \\ \ln(\frac{3}{10})-\ln(1-\alpha) \\ \ln(20) \end{pmatrix}$$

$$A \qquad\qquad \alpha \quad = \qquad b$$

$$\Rightarrow A^{-1}\cdot A\cdot\alpha=A^{-1}\cdot b$$

$$\Rightarrow \alpha=A^{-1}\cdot b$$

<u>Ausgleichsrechnung:</u>

für die ersten beiden Punkte:

$$b_0+b_1\cdot 1=20 \quad (\text{I})$$

$$b_0+b_1\cdot 2=30 \quad (\text{II}) \quad b_0=30-2b_1$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_o \\ b_1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 20 \\ 30 \end{pmatrix}$$

$$(\text{II})\in(\text{I})\Rightarrow 30-2b_1+1b_1=20$$

$$\rightarrow b_1=10$$

$$\Rightarrow aus(\text{I}): b_0=10$$

für die ersten drei Punkte ergibt sich:

$$b_0+b_1\cdot 1=20$$

$$b_0+b_1\cdot 2=30$$

$$b_0+b_1\cdot 3=40$$

➔ 2 Unbekannte und 3 Gleichungen.

$$A\cdot b=c \quad A=x^T\cdot x \quad c=x^T\cdot y$$

$$\Rightarrow x^T\cdot x\cdot b=x^T\cdot y$$

$$\Rightarrow b=(x^T\cdot x)^{-1}\cdot(x^T\cdot Y)$$

Hier: $x=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \quad x^T=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad c=\begin{pmatrix} 20 \\ 30 \\ 40 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow (x^T\cdot x)=\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 6 & 14 \end{pmatrix} \quad x^T\cdot c=\begin{pmatrix} 90 \\ 200 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 6 & 14 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 90 \\ 200 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow b_1 = 10, b_0 = 10$ Es ist also $\boxed{y = b_0 + b_1 * x = 10 + 10x}$

Gaußsches Prinzip der kleinsten Quadrate:

Schritte:

1) Funktionstyp auswählen: $\hat{y} = f(x, a, b, \ldots)$
   a, b, ... : zu bestimmende Parameter
2) Bildung der Summe der quadratischen Abweichungen als Funktion der zu bestimmenden Parameter

   $S(a, b, \ldots) = \sum (y_i - \hat{y}_i)^2$ $\sum \mathrel{\hat{=}} \sum_{i=1}^{n}$

3) S → min. Bildung und Nullsetzen der partiellen Ableitungen 1. Ordnung

$$\frac{\partial S}{\partial a} \overset{!}{=} 0$$
$$\frac{\partial S}{\partial b} \overset{!}{=} 0$$
...

Normalengleichungen

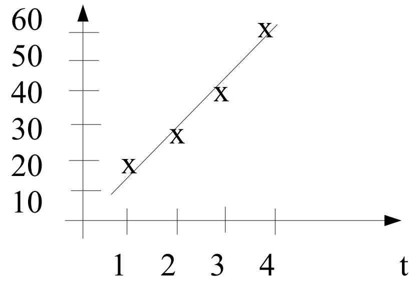
4) Lösen des Gleichungssystems → Parameter a, b, ...

3. Aufgabe:

x_i	1	2	3	4
y_i	20	30	40	60

Zu 1) $\hat{y} = b_0 + b_1 x$

Zu 2) $S(b_0, b_1) = \sum (y_i - \hat{y}_i)^2 = \sum (y_i - (b_0 + b_1 x_i))^2$



Zu 3) Differenzieren und Nullsetzen der partiellen Ableitungen.

$$\text{(I)} \quad \frac{dS(b_0, b_1)}{db_0} = -2 \sum (y_i - (b_0 + b_1 x_i)) = 0$$

$$\text{(II)} \quad \frac{dS(b_0, b_1)}{db_1} = -2 \sum (y_i - (b_0 + b_1 x_i)) x_i = 0$$

Umstellen auf Normalengleichungen:

$$Zu\,\text{(I)}: \sum y_i = \sum b_0 + \sum b_1 x_i$$
$$\Rightarrow \text{(I)} \quad b_0 \cdot n + b_1 \sum x_i = \sum y_i$$

analog: $Zu\,\text{(II)}: \sum y_i x_i = \sum b_o x_i + \sum b_1 x_i^2$

$$\Rightarrow \text{(II)} \quad b_0 \sum x_i + b_1 \sum x_i^2 = \sum x_i y_i$$

in Matrixschreibweise:

$$\begin{pmatrix} n & \sum x_1 \\ \sum x_i & \sum x_i^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_o \\ b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum y_i \\ \sum x_i y_i \end{pmatrix}$$

$$A \quad \cdot \quad b \;=\; c$$

$$x = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \quad x^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \quad y = \begin{pmatrix} 20 \\ 30 \\ 40 \\ 60 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A = x^T \cdot x = \begin{pmatrix} 4 & 10 \\ 10 & 30 \end{pmatrix} \quad c = x^T \cdot y = \begin{pmatrix} 150 \\ 440 \end{pmatrix}$$

Zur Berechnung:

$$\begin{pmatrix} 4 & 10 \\ 10 & 30 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 150 \\ 440 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad \begin{aligned} 4 b_0 + 10 b_1 &= 150 \quad (\mathrm{I}) \\ 10 b_0 + 30 b_1 &= 440 (\mathrm{II}) \\ \Rightarrow b_0 &= 44 - 3 b_1 \end{aligned}$$

$$176 - 12 b_1 + 10 b_1 = 150 \quad \Rightarrow \quad 26 = 2 b_1$$

$$\Rightarrow b_1 = 13$$

$$\Rightarrow b_0 = 5$$

Das Modell lautet also: $\hat{y} = 5 + 13 x$

4. Aufgabe:

$$A \cdot \vec{b} = \vec{c}$$

$$x^T \cdot x \cdot \vec{b} = x^T \cdot \vec{y}$$

$$\vec{b} = (x^T \cdot x)^{-1} (x^T \cdot y)$$

5. Aufgabe: Abweichungen: $e_i = (y_i - \hat{y}_i)$

x_i	*1*	*2*	*3*	*4*
y_i	20	30	40	60
$\hat{y}_i$	18	31	44	57
ei	2	-1	-4	3

$\hat{y} = 5 + 13 x$

$$x^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \quad e = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$x^T \cdot e = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum e_i \\ \sum x_i e_i \end{pmatrix}$$

Summe der Abweichungen muss Null ergeben, denn aus der partiellen Ableitung folgt:

$$(\mathrm{I}) \quad \frac{dS(b_{0,} b_1)}{db_0} = -2 \sum (y_i - (b_0 + b_1 x_i)) = 0$$

$$\Rightarrow \sum (y_i - \hat{y}_i)^2 = 0$$

$$\Rightarrow \sum e_i = 0$$

6. Aufgabe: multiple Regression
   Regressionsebene im Raum

$y = f(x_1, x_2)$
   x_1: Laufzeit der Firma
   x_2: Werbung

$\hat{y} = b_0 + b_1 x_1 - b_2 x_2$ *Ausgleichsebene*

$$S(b_{0,} b_{1,} b_2) = \sum (y_i - b_0 + b_1 x_{1i} - b_2 x_{2i})$$

Nach Differenzieren und Nullsetzen erhält man folgende Normalengleichungen:

$$\begin{aligned}
b_0 \cdot n \quad &+ b_1 \sum x_{1i} \quad + b_2 \sum x_{2i} \quad = \sum y_i \\
b_0 \sum x_{1i} &+ b_1 \sum x_{1i}^2 \quad + b_2 \sum x_{1i} x_{2i} = \sum y_i x_{1i} \\
b_0 \sum x_{2i} &+ b_1 \sum x_{2i} x_{1i} + b_2 \sum x_{2i}^2 \quad = \sum y_i x_{2i}
\end{aligned}$$

In Matrixschreibweise:

$$\begin{pmatrix} n & \sum x_{1i} & \sum x_{2i} \\ \sum x_{1i} & \sum x_{1i}^2 & \sum x_{1i} x_{2i} \\ \sum x_{2i} & \sum x_{2i} x_{1i} & \sum x_{2i}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_o \\ b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum y_i \\ \sum y_i x_{1i} \\ \sum y_i x_{2i} \end{pmatrix}$$

→ ausrechnen...